

Esame Istituzioni Matematica II, 19/4/2011 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4

studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 2,3,4

studenti del vecchio ordinamento (prima dei crediti): es: 2,3,4,5

1. Data la molecola d'acqua H_2O (a forma di triangolo isoscele)
 - (a) determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria C_{2v} della molecola completando la tabella (I) allegata;
 - (b) decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)). Dire, in particolare, quante sono le frequenze normali presenti nello spettro IR e quante nello spettro Raman.

2. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \log(1 + x^2 - y^2).$$

- (a) Determinare le linee di livello di f .
- (b) Dire se esiste il

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y)$$

giustificando la risposta.

- (c) Determinare le derivate prime parziali di f e il piano tangente al grafico nel punto $(1, 1)$.
- (d) Dire se la funzione ha punti critici ed eventualmente classificarli.
- (e) Trovare gli estremi vincolati di $f(x, y)$ con il vincolo

$$x + y = 1.$$

3. Sia F il campo dato da

$$F(x, y, z) \equiv (-y, x, 0).$$

- (a) F é conservativo? (giustificare la risposta).
- (b) Calcolare il lavoro del campo F dal punto A di coordinate $(1, 0, 0)$ al punto B di coordinate $(-1, 0, 1)$ lungo l'arco di spirale

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = \frac{\theta}{\pi} \end{cases}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

4. Nello spazio (x, y, z) , si consideri il solido V ottenuto dal triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, 1, a)$, con $a > 1$ per rotazione attorno all'asse z . Determinare $a > 1$ in modo che il volume di V sia uguale a 3.

5. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n>1} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{n^2 - 1}.$$

Il gruppo C_{3v} ha 6 elementi E , $2C_3$, $3\sigma_v$ (il coefficiente davanti indica quanti elementi del dato tipo ci sono) e ha 3 rappresentazioni irriducibili (A_1 , A_2 , B) con tavola dei caratteri

| Γ_i | E | C_2 | σ_v | σ'_v | IR | Ra |
|------------|-----|-------|------------|-------------|-----|-----------------|
| A_1 | 1 | 1 | 1 | 1 | z | x^2, y^2, z^2 |
| A_2 | 1 | 1 | -1 | -1 | | xy |
| B_1 | 1 | -1 | 1 | -1 | x | xz |
| B_2 | 1 | -1 | -1 | 1 | y | yz |

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ , il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n - 2) * (2\cos(\theta) + 1)$; se l'elemento è una rotazione impropria di angolo θ , si considera il numero u'_n di atomi fissi e si moltiplica $u'_n * (2\cos(\theta) - 1)$.

| | E | C_2 | σ_v | σ'_v |
|-----------------------|-----|-------|------------|-------------|
| θ | ... | ... | ... | ... |
| $2\cos(\theta) \pm 1$ | ... | ... | ... | ... |
| $u_n - 2, u'_n$ | ... | ... | ... | ... |
| $\chi(R)$ | ... | ... | ... | ... |

(I)

Si ricorda che una certa frequenza normale è attiva nello spettro IR se la corrispondente rappresentazione irriducibile è presente in (x, y, z) , ed è attiva nello spettro Raman se è presente in $(x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$.

Numero frequenze normali IR: ...

Numero frequenze normali Ra: ...