Esame Istituzioni Matematica II, 17/9/2012 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 1,2,3

1. Sia data la funzione di due variabili
$$f(x,y) \; = x^3 - 3xy^2$$
   (a) Dire se esiste il limite
   $$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$$
   (b) Dimostrare che l'origine $O(0,0)$ è l'unico punto critico di f; dimostrare che O non è punto di massimo relativo, né di minimo relativo, né di sella.

   (c) Determinare il numero degli estremi vincolati di f sul vincolo
   $$x^2 + y^2 = 1$$
   (determinando quanti sono i massimi e i minimi relativi vincolati).

2. Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali. Sia $\vec{F}$ il campo di vettori che nel punto $P(x,y,z)$ ha componenti $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (prodotto di A per il vettore delle coordinate).

   (a) Calcolare il lavoro di $\vec{F}$ nel caso in cui $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sul cammino chiuso
   $$\begin{cases} x &= \cos(t) \\ y &= \sin(t) \\ z &= 0 \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$
   (b) Dire in generale che condizione deve soddisfare la matrice A affinché $\vec{F}$ sia conservativo.

   (c) Calcolare il potenziale nel caso in cui la condizione al punto precedente sia verificata.

3. Sia D il dominio
$$D \; = \; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \ge 1\}.$$
Se $r = \sqrt{x^2+y^2}$, dire per quali $\alpha > 0$ converge (cioè ha un valore finito) l'integrale improprio
$$\varphi(\alpha) \; := \; \iint_D \frac{1}{r^\alpha} \, dxdy$$
e disegnare la funzione $\beta = \varphi(\alpha)$ (in un piano cartesiano di coordinate (α, β)).

4. Sia data una molecola A, A, A, A con 4 atomi ai vertici di un tetraedro regolare.

   (a) Dire cosa si intende per rappresentazione totale e determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria T_d completando la tabella (I) allegata;

   (b) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare (con la loro molteplicitá) le frequenze che appaiono in Ir e Ra.

   (c) Enunciare le regole di selezione per gli spettri I.R. e Ra.

==============================

Il gruppo T_d ha 5 rappresentazioni irriducibili ($A_1,\ A_2,\ B,\ F_1,\ F_2$) con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$	Ir	Ra
A_1	1	1	1	1	1	non attivo	attivo
A_2	1	1	1	-1	-1	non attivo	non attivo
B	2	-1	2	0	0	non attivo	attivo
F_1	3	0	-1	1	-1	non attivo	attivo
F_2	3	0	-1	-1	1	attivo	attivo

$(*)$

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e motiplicando $u_n * (2cos(\theta) + 1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si moltiplica $u_n * (2cos(\theta) - 1)$.

T_d	E	$8C_3$	$3C_2$	$6\sigma_d$	$6S_4$
θ	...	...	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...	...	...
$u_n - 2, u'_n$	...	...	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...	...	...

(I)

Numero frequenze normali IR: ....

Numero frequenze normali Ra: ....