Esame Istituzioni Matematica II, 15/2/2011 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 2,3,4
studenti del vecchio ordinamento (prima dei crediti): es: 2,3,4,5

1. Data una molecola con 4 atomi ai vertici di una piramide retta avente base un triangolo equilatero:
   (a) determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria C_{3v} della molecola completando la tabella (I) allegata;
   (b) decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)). Dire, in particolare, quante sono le frequenze normali presenti nello spettro IR e quante nello spettro Raman.

2. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x, y) \;=\; e^{-x^2+y^3-y}.$$

   (a) Dire se esiste il

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$$

   giustificando la risposta.
   (b) Scrivere lo sviluppo di Taylor di f nel punto $(0, 0)$ fino al secondo ordine (trascurando il resto).
   (c) Dire se la funzione ha punti critici ed eventualmente classificarli.
   (d) Trovare gli estremi vincolati di $f(x, y)$ con il vincolo

$$y^3 - y = 1.$$

3. (a) Il campo F che, nel punto di coordinate cilindriche (ρ, θ, z) ha coordinate cartesiane

$$F \equiv \; (-\rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta), 1),$$

   é conservativo? (giustificare la risposta).
   (b) Calcolare il lavoro del campo F dal punto A di coordinate $\rho = 1, \theta = 0, z = 0$ al punto B di coordinate $\rho = 1, \theta = 0, z = 2\pi$ sia lungo il segmento AB che lungo l'arco di spirale

$$\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = \theta \end{cases} \qquad , 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

4. Dato il paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

   determinare $a > 0$ in modo che il volume della regione interna al paraboloide e sottostante il piano $z = a$ sia uguale a 1.

5. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n>0} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}.$$

Il gruppo $\mathcal{C}_{3v}$ ha 6 elementi $E,\ 2C_3,\ 3\sigma_v$ (il coefficiente davanti indica quanti elementi del dato tipo ci sono) e ha 3 rappresentazioni irriducibili ($A_1,\ A_2,\ B$) con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	IR	Ra
A_1	1	1	1	z	$x^2+y^2,\ z^2$
A_2	1	1	-1		
B	2	-1	0	(x,z)	$(x^2-z^2,xy),(xz,yz)$

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n-2)*(2cos(\theta)+1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si considera il numero u'_n di atomi fissi e si moltiplica $u'_n*(2cos(\theta)-1)$.

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta)\pm 1$	...	...	...
u_n-2, u'_n	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Si ricorda che una certa frequenza normale é attiva nello spettro IR se la corrispondente rappresentazione irriducibile é presente in (x,y,z), ed é attiva nello spettro Raman se é presente in (x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz).

Numero frequenze normali IR: ...
Numero frequenze normali Ra: ...