

Esame Istituzioni Matematica II, 13/1/2009 (prof. M. Salvetti)

1. Sia data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = - \frac{\log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

- (a) Descrivere il dominio di f e le sue linee di livello.
(b) Calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow 0} f(x, y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y)$$

- (c) Scrivere le derivate prime parziali di f , calcolare il gradiente di f nel punto $P \equiv (1, 2)$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f in tale punto.
(d) Dire se esistono punti di massimo e minimo della funzione e calcolarli.
(e) Minimizzare $f(x, y)$ con la condizione

$$g(x, y) = xy - k, \quad k > 0, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \text{numero fissato.}$$

2. (a) Dire se il campo

$$F(x, y, z) \equiv (x e^{x^2+2y^2+3z^2}, 2y e^{x^2+2y^2+3z^2}, 3z e^{x^2+2y^2+3z^2})$$

è conservativo. In caso affermativo, determinarne un potenziale.

- (b) Calcolare il lavoro del campo lungo la circonferenza di centro $(0, 0, 0)$ e di raggio 2, contenuta nel piano (x, y) , che parte dal punto $(2, 0, 0)$.

3. Calcolare l'integrale della funzione

$$f(x, y) = \frac{5xy}{x^2 + y^2}$$

nel dominio

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 5\}$$