Esame Istituzioni Matematica II, 10/1/2012 (prof. M. Salvetti)

studenti del nuovo corso (6 crediti): eser. 1,2,3,4
studenti del vecchio corso (3 crediti): es: 1,2,3

1. Sia data la funzione di due variabili
$$f(x,y) = e^{x^3+y^3-3\alpha(x+y)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
   (a) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione ha dei punti critici.

   (b) Classificare gli eventuali punti critici della funzione ottenuta ponendo $\alpha = 1$, specificando anche se gli eventuali massimi e minimi trovati sono relativi o assoluti.

   (c) Ancora ponendo $\alpha = 1$, trovare gli estremi vincolati di $f(x,y)$ con il vincolo
$$x^2 + y^2 = 2$$

2. (a) Dati due campi conservativi $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, definiti sullo stesso dominio di $\mathbb{R}^3$, dimostrare che il campo
$$a\mathbf{F} + b\mathbf{G}$$
é conservativo per ogni valore di a e b in $\mathbb{R}$.

   (b) Dare un esempio di due campi conservativi $\mathbf{F}, \mathbf{G}$, tali che il campo prodotto vettore
$$\mathbf{H}(x,y,z) := \mathbf{F}(x,y,z) \times \mathbf{G}(x,y,z)$$
non sia conservativo e un esempio in cui lo sia.

3. Sia $S_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ una palla di raggio r, sia $P_a := (0,a,0)$, $a \geq r$, un punto sull'asse y e sia $C_a := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, \ \rho \leq \frac{r}{a}(a-y), \ \text{con } \rho = \sqrt{x^2+z^2} \ \}$ il cono di vertice P_a e base l'intersezione tra S_r e il piano x,z).

   (a) Calcolare il volume V_a dell'intersezione tra S_r e C_a, e specificare tra che valori esso varia per $a \in [r, +\infty)$.

   (b) (facoltativo) Determinare l'area della calotta sferica contenuta in C_a.

4. (a) Data una molecola A, A, A, B, a forma una piramide retta a base un triangolo equilatero A, A, A, descrivere geometricamente gli elementi del gruppo di simmetria C_{3v} della molecola e le classi di coniugio del gruppo. Dedurre il numero di rappresentazioni irriducibili e i loro ordini.

   (b) Determinare il carattere della rappresentazione totale (ridotta) Γ del gruppo di simmetria C_{3v} completando la tabella (I) allegata;

   (c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I)) e specificare le frequenze che appaiono in Ir e Ra.

   (d) Verificare le colonne Ir e Ra della tabella (*).

Il gruppo $\mathcal{C}_{3v}$ ha 6 elementi $E,\ 2C_3,\ 3\sigma_v$, e ha 3 rappresentazioni irriducibili $(A_1,\ A_2,\ E)$ con tavola dei caratteri

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$	Ir	Ra
A_1	1	1	1	z	x^2+y^2, z^2
A_2	1	1	-1		
E	2	-1	0	(x,z)	$(x^2-y^2, xy),\ (xz, yz)$

$(*)$

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale ridotta si determina considerando, per ogni elemento del gruppo che sia una rotazione propria di angolo θ, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n-2)*(2cos(\theta)+1)$; se l'elemento e' una rotazione impropria di angolo θ, si considera il numero u'_n di atomi fissi e si moltiplica $u'_n*(2cos(\theta)-1)$.

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2cos(\theta)\pm 1$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
u_n-2, u'_n	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\chi(R)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(I)

Numero frequenze normali IR: $\dots$
Numero frequenze normali Ra: $\dots$