$\mathcal{C}$ $\qquad l(\mathcal{C}) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$

C parametrizzata $\qquad \vec{r} = \vec{r}(t)$ $\qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$s = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$ $\qquad$ è la lunghezza dell'arco tra il punto iniziale e il punto corrispondente a t.

$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$ $\qquad$ quindi

$\vec{r} = \vec{r}(s)$ $\qquad$ allora $\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1$

$$ds = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

$$l(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} 1 \cdot ds = \int_{s_0}^{s_1} 1 \cdot ds$$

si generalizza prendendo $f(x,y,z)$ definita in un dominio, prendendo una curva C contenuta nel dominio e definiamo

$$\int_C f \cdot ds$$

$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad t \in [a, b]$

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$

$\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| \; f(\vec{r}(t_i^*))$$

$t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$

se queste somme convergono al tendere dell'ampiezza delle partizioni a un certo numero α

α è l'<u>integrale curvilineo</u> di f lungo $\mathcal{C}$ e la indico con

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds$$

$$\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| \approx \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t_i)\right\| (t_{i+1} - t_i) =$$

$$= \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t_i)\right\| \Delta t$$

Quindi la somma scritta sopra diventa:

$$\sim \sum f(r(t_i)) \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t_i)\right\| \Delta_i t$$

$$\longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} f(\vec{r}(t)) \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| dt =$$

$$= \int_{C} f \, ds$$

Data parametrizzazione della curva $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$

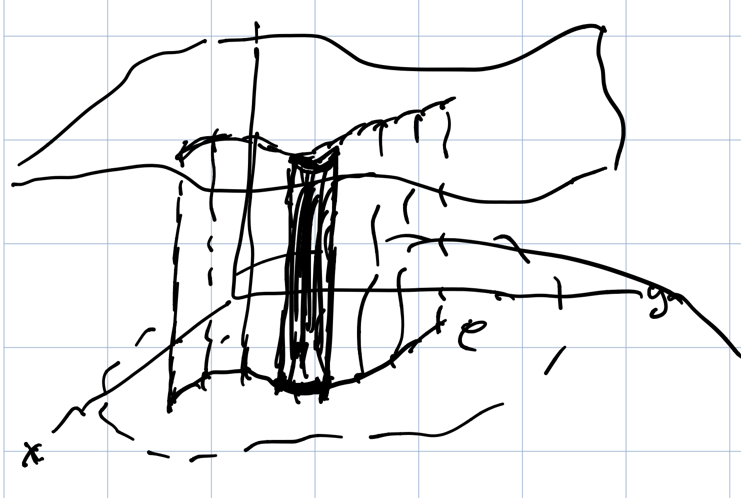
$$\int_{C} f \, ds = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

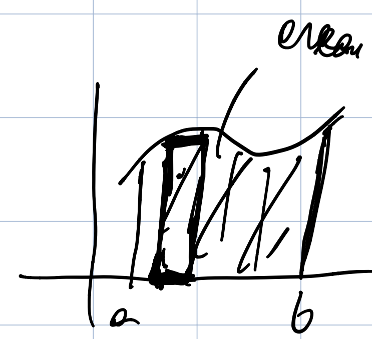
---

in 2 variabili

$f(x, y)$ $\quad C \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$



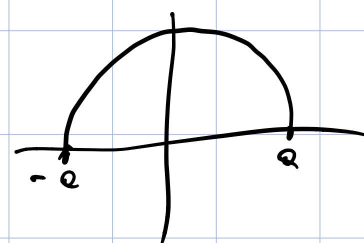
area del sottografico è l'integrale curvilineo



es

cerchio di raggio $a > 0$ con centro in $(0,0)$.

$\mathcal{C}$ mezzo cerchio $(y \geq 0)$:



$$\int_{\mathcal{C}} y\, ds = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt \qquad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = a \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = a$$

$$\int_{\mathcal{C}} y\, ds = \int_0^{\pi} a \sin t \; a \, dt = a^2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt$$

$$= a^2 \left[-\cos t \right]_0^{\pi} = a^2 \left[1 + 1 \right] = 2a^2$$

$\mathcal{C}$ $\quad \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\,\text{sen}\, t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$

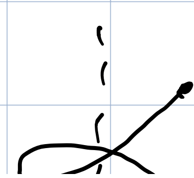
$$\int_{\mathcal{C}} z\, ds \qquad\qquad \begin{cases} x'(t) = \cos t - t\,\text{sen}\, t \\ y'(t) = \text{sen}\, t + t\cos t \\ z'(t) = 1 \end{cases}$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\cos^2(t) + t^2\text{sen}^2 t \cancel{- 2t\cos t\,\text{sen}\, t} + \text{sen}^2 t + t^2\cos^2 t \cancel{+ 2t\cos t\,\text{sen}\, t} + 1}$$

$$= \sqrt{2 + t^2}$$

$$\int_{\mathcal{C}} z\, ds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\; dt = \dots\dots\dots\dots$$

massa di un filo $\qquad \vec{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}\, t \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$



con densità lineare $\delta(x,y,z)=z$

$dm = \delta\, ds$

massa di $\mathcal{C}$ $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} dm = \int_{\mathcal{C}} \delta\, ds$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} x' = -\operatorname{sen} t \\ y' = \cos t \\ z' = 1 \end{cases}$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{2}$$

$$\text{massa} = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(4\pi^2\right) = 2\sqrt{2}\,\pi^2$$

esercizi cap. 6.3

CAMPI VETTORIALI

in $\mathbb{R}^n$: $\quad \vec{F}: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\quad D \subset \mathbb{R}^n$

campo piano $n=2$ $\quad \vec{F}: D \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = \left(F_1(x,y), F_2(x,y)\right) =$$

$$= F_1(x,y)\,\vec{i} + F_2(x,y)\,\vec{j}$$

campo spaziale $n=3$ $\qquad \vec{F} : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) \equiv \left(F_1(x,y,z),\, F_2(x,y,z),\, F_3(x,y,z)\right)$$
$$= F_1(x,y,z)\,\vec{i} + F_2(x,y,z)\,\vec{j} + F_3(x,y,z)\,\vec{k}$$

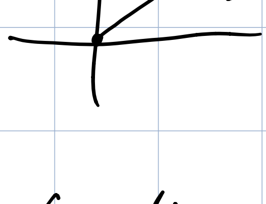
$\vec{F}$ campo continuo se le sue componenti sono continue

differenziabile se le F_i lo sono.

<u>es</u> <u>campo radiale</u>.

$\vec{F}(\vec{r})$ è proporzionale a $\vec{r}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r} &\equiv (x,y,z) \\ r &= \|\vec{r}\| \\ &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}}$$



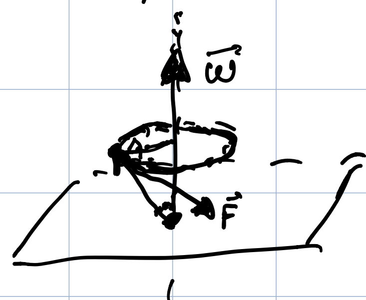
$$\vec{F}(\vec{r}) = \varphi(\vec{r})\,\vec{r}$$

Campo di una carica nell'origine $\qquad \vec{F}(\vec{r})$

$$\|\vec F(\vec r)\| = k\,\frac{1}{r^2} \qquad = \|\varphi(\vec r)\,\vec r\| = |\varphi(\vec r)|\, r$$

$$\Rightarrow \quad |\varphi(\vec r)| = \frac{k}{r^3} \qquad\qquad \vec F(\vec r) = \frac{k}{r^3}\,\vec r$$

campo di velocità di un corpo che ruota intorno a un asse.



$$\vec F(\vec r) = k\ \vec\omega \times \vec r$$

$$\|\vec F(\vec r)\| = k\,\|\vec\omega\|\,\underbrace{r\ \mathrm{sen}(\vec\omega,\vec r)}_{\text{distanza dall'asse}}$$

---

linee di campo (curve integrali)

$\vec r = \vec r(t)$

In ogni punto della linea di campo $P = \vec r(t)$, $\dfrac{d\vec r}{dt}(t)$ è proporzionale a $\vec F(P)$

equazione delle linee di campo:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lambda(t)\,\vec{F}(\vec{r}(t))$$

è un sistema di equazioni differenziali $\quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda(t)\, F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ y'(t) = \lambda(t)\, F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ z'(t) = \lambda(t)\, F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}$$

es. $\quad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{k}{r^3}\vec{r} = \frac{k}{r^3}(x, y, z) =$

$$= \frac{k}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}(x, y, z)$$

$$\frac{dx}{x}\left(\frac{\sqrt{\cdots}^{\,3}}{k}\right) = \frac{dy}{y}\left(\frac{\sqrt{\cdots}^{\,3}}{k}\right) = \frac{dz}{z}\left(\frac{\sqrt{\cdots}^{\,3}}{k}\right)$$

$$\left(\frac{dx}{} = \frac{dy}{} \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z} \end{cases}$$

------ le soluzioni devono essere rette per l'origine

Campi conservativi

Def. $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, si dice conservativo se $\exists\ \varphi : D \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\vec{F} = \nabla \varphi$$

---

un tale φ si dice POTENZIALE di $\vec{F}$

se $\exists$ potenziale, è unico?

$$\psi = \varphi + \text{cost} \qquad \nabla\psi = \nabla\varphi = \vec{F}$$

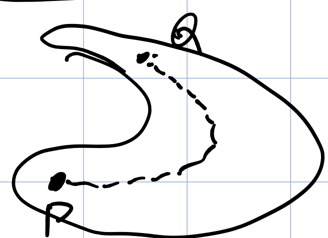
Vorrei dimostrare che se $\nabla\varphi = \nabla\psi$ in ogni punto del dominio D, allora differiscono per una costante.

$$0 = \nabla\varphi - \nabla\psi = \nabla(\varphi - \psi)$$

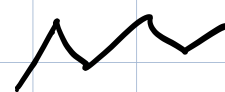
quindi basta che dimostri che se una funzione φ ha $\nabla\varphi \equiv 0$ $\forall$ punto del dominio, allora φ è costante [in una variabile $\varphi(t_2)-\varphi(t_1)= \varphi'(\xi)(t_2-t_1)$]

Vale se il dominio è <u>CONNESSO</u>

<u>def.</u> D si dice <u>connesso</u> se $\forall P, Q \in D$,
$\exists$ curva $\mathcal{C}$ (continua) contenuta completamente in D
che congiunge i due punti.



(basta avere $\mathcal{C}$ differenziabile a tratti)



[supponiamo $\nabla\varphi(P)=0 \quad \forall P\in D$, D connesso
$\Rightarrow \varphi = cost$

φ localmente costante $\quad \varphi(Q)=\varphi(P)$
se $\quad Q\in B_\varepsilon(P)\subset D$

$$\varphi(Q)=\varphi(P)+\langle\nabla\varphi(P+\theta(Q-P)).(Q-P)\rangle$$

resto al 1° ordine della formula di Taylor

se Q è lontano, si prende una curva $\mathcal{C}$ che li

Connessa e si ricopre con intorni in cui φ è costante
nell'intersezione di 2 intorni φ vale la stessa costante $\Rightarrow$
$\varphi(Q) = \varphi(P)$.

<u>oppure</u>: $\quad g(t) = \varphi(x(t), y(t), z(t))$

$$g'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\dots)\, x'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\dots)\, y'(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\dots)\, z'(t) =$$

$$= \langle \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\nabla \varphi}}, (x', y', z') \rangle = 0 \quad \forall t$$

$g(t)$ è costante
