Esercizio Sia $P \equiv (x_0, y_0)$ t.c. $f(x_0,y_0)=0$ e $\nabla f(P) \neq \underline{0}$. Allora la retta tangente alla curva $f(x,y)=0$ in P è data da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

Similmente se $P \equiv (x_0,y_0,z_0)$ e $f(x_0,y_0,z_0)=0$, $\nabla f(P) \neq \underline{0}$, allora il piano tangente alla superficie $f(x,y,z)=0$ in P è dato da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \qquad (*)$$

dim supponiamo ad es. che $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, allora per il teorema del Dini la superficie si scrive come $z=\varphi(x,y)$ vicino a (x_0,y_0). Il piano tangente in $(x_0,y_0,z_0=\varphi(x_0,y_0))$ è:

$$z-z_0=\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

e $$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

da cui $(*)$.

Curve parametrizzate

curva: $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$\varphi(t)=(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$

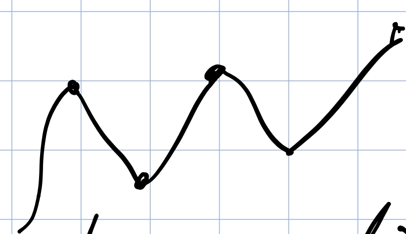
curve piane $n=2$

curve spaziali $n=3$

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \\ z = \varphi_3(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

curva differenziabile se tutte le φ_i sono funzioni differenziabili, ecc.

differenziabile a tratti:

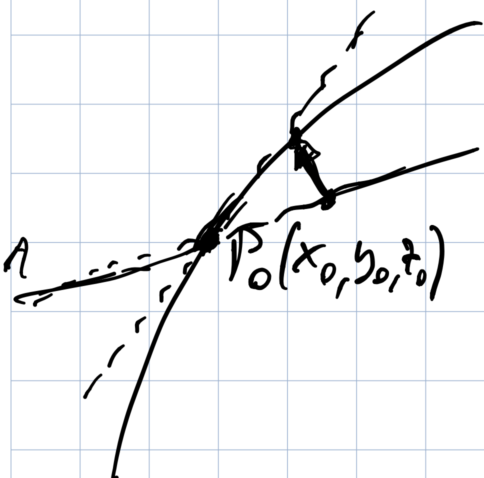


continua e differenziabile ad eccezione di alcuni punti isolati.

vettore velocità $\quad \dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t) =$

$$= (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t))$$

in un t dove φ è differenziabile.



$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \\ z_0 = z(t_0) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{bmatrix}$$

r retta per P_0:
$$\begin{cases} x = x_0 + a(t-t_0) \\ y = y_0 + b(t-t_0) \\ z = z_0 + c(t-t_0) \end{cases}$$

differenza tra punto sulla curva e sulla retta

$$\big(x(t), y(t), z(t)\big) - \big(x_0 + a(t-t_0), y_0 + b(t-t_0), z_0 + c(t-t_0)\big) =$$
$$= \big(x(t) - x_0 - a(t-t_0), y(t) - y_0 - b(t-t_0), z(t) - z_0 - c(t-t_0)\big)$$

lunghezza

$$\|(\ldots , \ldots)\| =$$
$$= \sqrt{\big(x(t) - \underset{x(t_0)}{x_0} - a(t-t_0)\big)^2 + \big(y(t) - y_0 - b(t-t_0)\big)^2 + \big(z(t) - z_0 - c(t-t_0)\big)^2}$$
$$= \sqrt{\big((t-t_0)\, x'(\xi_1) - a(t-t_0)\big)^2 + \big((t-t_0)\, y'(\xi_2) - b(t-t_0)\big)^2 + \ldots}$$

$\uparrow$ Lagrange

$$+\left((t-t_0)\,z'(\xi_3)-c(t-t_0)\right)^2$$

$$= |t-t_0| \sqrt{(x'(\xi_1)-a)^2+(y'(\xi_2)-b)^2+(z'(\xi_3)-c)^2}$$

divido per $|t-t_0|$: tiene

$$\sqrt{(x'(\xi_1)-a)^2+(y'(\xi_2)-b)^2+(z'(\xi_3)-c)^2}$$

per $t \to t_0$ tende a

$$\sqrt{(x'(t_0)-a)^2+(y'(t_0)-b)^2+(z'(t_0)-c)^2}$$

tende a $0 \iff a = x'(t_0),\ b = y'(t_0)\ c = z'(t_0)$

<u>retta tangente parametrizzata</u>

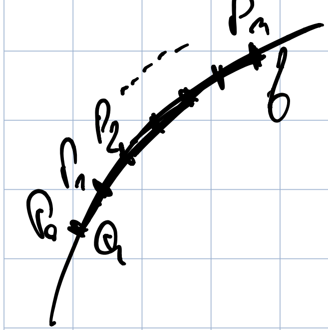
$$\begin{cases} x = x_0 + x'(t_0)\,(t-t_0) \\ y = y_0 + y'(t_0)\,(t-t_0) \\ z = z_0 + z'(t_0)\,(t-t_0) \end{cases}$$

---

versore tangente alla curva : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

$\rightarrow$

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}\,(x'(t), y'(t), z'(t)) \qquad [\; z = z(t)$$



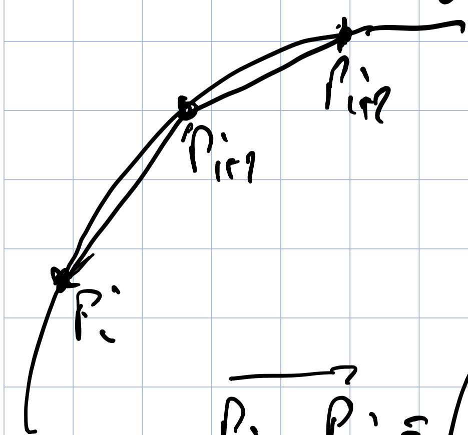
$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

$\mathcal{P}$ partizione

partizione di $[a, b]$ $\qquad a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

$$P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i))$$

Considero la curva lineare a tratti $C_{\mathcal{P}}$ ottenuta unendo con un segmento punti consecutivi



$C_{\mathcal{P}}$ avrà lunghezza

$$\sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = l(C_{\mathcal{P}})$$

$$\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = (x(t_i) - x(t_{i-1}),\ y(t_i) - y(t_{i-1}),\ z(t_i) - z(t_{i-1}))$$

$$\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}$$

[illegible]

Def La curva C si dice <u>rettificabile</u> se $\ell(C_P)$ è un insieme limitato (al variare della partizione P). In questo caso, l'estremo superiore è la lunghezza di C.

$$\|P_{i-1}P_i\| \underset{\text{Lagrange}}{=} \sqrt{\left((t_i-t_{i-1})\, x'(\xi_1)\right)^2 + \left((t_i-t_{i-1})\, y'(\xi_2)\right)^2 + \left((t_i-t_{i-1})\, z'(\xi_3)\right)^2} =$$

$$= (t_i-t_{i-1}) \sqrt{\left(x'(\xi_1)\right)^2 + \left(y'(\xi_2)\right)^2 + \left(z'(\xi_3)\right)^2}$$

$$\sim (t_i-t_{i-1}) \sqrt{x'(t_{i-1})^2 + y'(t_{i-1})^2 + z'(t_{i-1})^2}$$

La lunghezza la ottengo facendo il limite sull'ampiezza della partizione che tende a 0, cioè

$$\sum (t_i - t_{i-1}) \sqrt{\cdots\cdots}$$

questa è una somma di Riemann della funzione

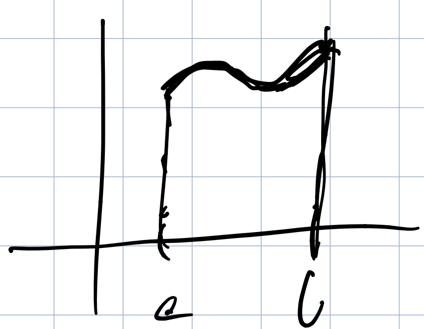
$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

Quindi al limite trovo

$$\mathcal{L}(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

es. lunghezza di un grafico $y = f(x)$

$x \in [a,b]$

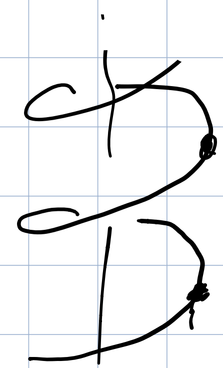


$$x \longrightarrow (x, f(x))$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = f'(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dt$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \,\mathrm{sen}\, t \\ z = b t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = -a\,\mathrm{sen}\, t \\ y' = a\cos t \\ z' = b \end{cases}$$

lunghezza nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \mathrm{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\; dt =$$

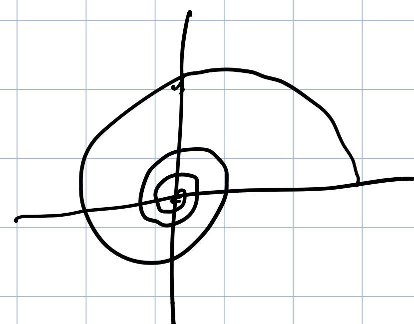
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\; dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

eserc coord. polari (ρ, θ)

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

curve date come $\rho = \rho(\theta)$

es: $\rho = e^{-k\theta}$



$\theta \in [0, \infty)$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos\theta \\ y = \rho(\theta) \,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$x'(\theta) = \rho'(\theta) \cos\theta - \rho(\theta) \,\text{sen}\,\theta$$

$$y'(\theta) = \rho'(\theta) \,\text{sen}(\theta) + \rho(\theta) \cos\theta$$

$$\int^{\theta_1} \sqrt{\rho'(\theta)^2 \cos^2\theta + \rho(\theta)^2 \,\text{sen}^2\theta \cancel{- 2\rho'\rho \cos\theta \,\text{sen}\,\theta} \quad +}$$

$$\theta_0 \quad + \rho'(\theta)^2 \sin^2(\theta) + \rho(\theta)^2 \cos^2(\theta) + \cancel{2\rho'\rho \sin\theta\cos\theta} \; d\theta$$

$$\boxed{= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} \; d\theta}$$

nell'esempio $\rho = e^{-k\theta}$

$$\rho'(\theta) = -k \, e^{-k\theta}$$

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{k^2 e^{-2k\theta} + e^{-2k\theta}} \; d\theta =$$

$$= \sqrt{k^2+1} \int_0^{\alpha} e^{-k\theta} \; d\theta =$$

$$= \sqrt{k^2+1} \left[-\frac{1}{k} e^{-k\theta} \right]_0^{\alpha} \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$$

---

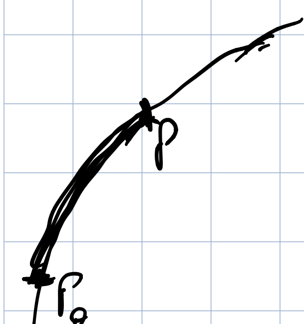
vettore posizione:

$$\mathcal{C}: \vec{r} \equiv (x, y, z) \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \iff \vec{r} = \vec{r}(t)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

lunghezza: $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$

<u>parametro lunghezza d'arco</u> s



fissiamo $P_0 \in \mathcal{C}$.

Un punto $P \in \mathcal{C}$ ha parametro corrispondente alla lunghezza del tratto di curva tra P_0 e P.

$$s(P) = \int_0^P \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt =$$

t_0

se la curva è parametrizzata da t,

$P_0 = \vec{r}(t_0)$, $P = \vec{r}(t)$

$$s = \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

$\vec{r} = \vec{r}(s)$ allora $\left\| \dfrac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1$

$\dfrac{ds}{dt} = \left\| \dfrac{d\vec{r}}{dt} \right\|$ quindi se $t = s$

$\dfrac{ds}{ds} = 1$

---

es $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \\ z = b t \end{cases}$ $\left\| \dfrac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\neq 1$

trovare la parametrizzazione tramite

S.

Soluzione: $s = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, dt = t\sqrt{a^2+b^2}$

Quindi

$$\begin{cases} x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z = b \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

verifica che $\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1$:

$$\begin{cases} x'(s) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y'(s) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z'(s) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \equiv 1$$