Estremi vincolati di una $f(x_1, \dots, x_n)$

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$

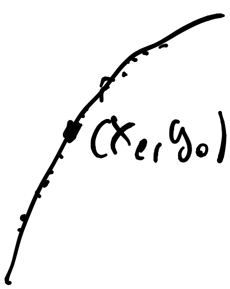
__vincolo__ $g(x,y) = 0$

cioè $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$

__Problema__ Trovare i massimi e i minimi vincolati di f

__massimo vincolato__ $P \equiv (x_0, y_0)$ t.c. $g(x_0,y_0) = 0$

e $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ $\forall (x,y)$ t.c. $g(x,y) = 0$



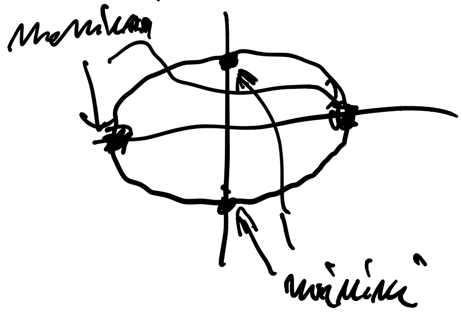
__osservazione:__ se P è massimo (non vincolato) di $f \Rightarrow P$ è massimo vincolato

Il viceversa non vale:

__Eg.__ $f(x,y) = x^2 + y^2$

ha solo un minimo in $(0,0)$ e nessun altro punto critico

$$g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$



la f ha sia massimo che minimo vincolati

(per Weierstrass, f ristretta a un compatto ha massimo e minimo)

$f(x,y,z)$ vincolo $g(x,y,z)=0$

una superficie

oppure $\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

equivalentemente: il vincolo è luogo di zeri di

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$g(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))$

$g(x,y)=0$ un punto $(x_0,y_0) \in$ vincolo

$(g(x_0,y_0)=0)$

è un <u>punto liscio</u> del vincolo se

$$\nabla g(x_0,y_0) \neq \underline{0}$$

dal teo del Dini, se $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$,
per esempio $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, $y = \varphi(x)$ in un intorno del punto $x \to (x, \varphi(x))$ dà parametrizzazione del vincolo per x vicino a x_0. Quindi in (x_0,y_0) c'è una retta tangente $y - y_0 = \varphi'(x_0)(x-x_0)$ che ha vettore direzione $(1, \varphi'(x_0))$.

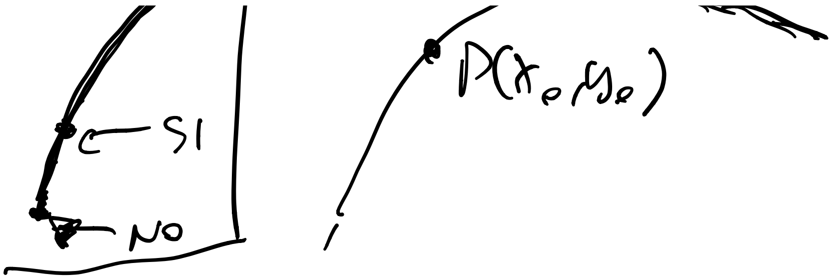
<u>Ricordiamo</u>: $\nabla g(x_0,y_0)$ è ortogonale a tale retta tangente [$g(x,\varphi(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x)) +$

$$+ \frac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) = 0$$

$$\langle \nabla g(x,\varphi(x)), (1, \varphi'(x)) \rangle = 0 \;]$$

Criterio dei MOLTIPLICATORI di Lagrange

Sia $P \equiv (x_0,y_0)$ un estremo vincolato (cioè minimo assoluto vincolato o massimo assoluto vincolato) e f e g abbiano derivate continue in un intorno di P. Sia P un punto liscio del vincolo



Allora $\exists\ \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.c. (x_0, y_0, λ_0) è un punto critico della funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$$

Quindi $\exists\ \lambda_0$ t.c. (x_0, y_0, λ_0) annulla il gradiente di $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y) = g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Cioè gli estremi vincolati vanno ricercati tra (cioè gli ...

i punti (x_0,y_0) t.c. $\exists \lambda_0$ (x_0,y_0,λ_0) soluzione del sistema scritto)

---

ultima equazione $\Rightarrow$ il punto sta nel vincolo

prima e seconda equazione si riscrivono come

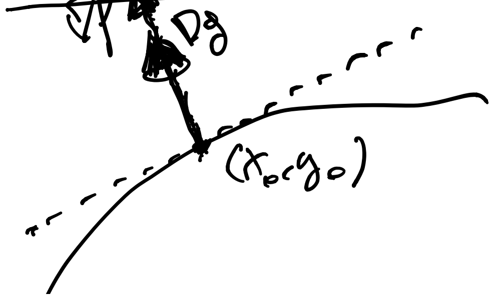
$$\nabla f(x,y)+\lambda \nabla g(x,y)=\underline{0}$$

Quindi (x_0,y_0) è estremo vincolato $\Rightarrow$

$$\nabla f(x_0,y_0)+\lambda_0 \nabla g(x_0,y_0)=0$$

$\Leftrightarrow$ $\nabla f(x_0,y_0)=-\lambda_0 \nabla g(x_0,y_0)$

cioè ∇f e ∇g sono multipli in (x_0,y_0)



quindi in (x_0,y_0) anche $\nabla f(x_0,y_0)$ deve essere ortogonale al vincolo

Quindi per dimostrare il teorema basta dimostrare questa condizione geometrica: in $P(x_0, y_0)$ il $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale al vincolo.

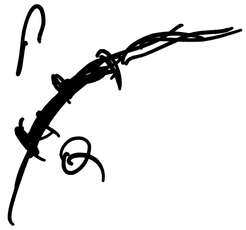
Osservazione. Se $P(x_0, y_0) \in$ vincolo è un punto critico di f ($\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$) $\Rightarrow$ $(x_0, y_0, 0)$ risolve il sistema.

Dim. teorema. Supponiamo per esempio $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Per Dini il vincolo è grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ (in un intorno di P).

Supponiamo che P sia massimo vincolato.

Quindi $f(P) \geq f(Q)$ se Q sta in un intorno di f intersecato col vincolo.



Sia $h(x) = f(x, \varphi(x))$, per x che varia nell'intorno di x_0 per cui è definita $\varphi(x)$.

Segue che h ha un massimo in x_0

$$\left(h(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0) = y_0) \geq h(x) = f(x, \varphi(x)) = f(Q)\right)$$

$Q \in$ vincolo

$$\Rightarrow h'(x_0) = 0 \quad \text{(teo di Fermat)}$$

$$\|$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 = \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 = \varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) = 0$$

$$\langle \nabla f(x_0, y_0), (1, \varphi'(x_0)) \rangle = 0$$

vettore tangente al vincolo

Q.E.D.

---

es. Determinare la distanza più breve fra l'origine e la curva $x^2 y = 16$

$d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

oss minimizzare $\sqrt{x^2+y^2}$ equivale a minimizzare x^2+y^2

$$L(x,y,\lambda)=\sqrt{x^2+y^2}+\lambda(x^2y-16)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+2\lambda xy=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\lambda x^2=0\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2y-16=0\end{cases}$$

$x=0$ NO

$$x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2\lambda y\right)=0 \qquad (\ldots)=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+2\lambda y=0 \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=-2\lambda y$$

$y=0$ non dà soluzioni

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lambda x^2 = 0 \\ x^2 y = 16 \end{cases} \qquad \frac{1}{2y\sqrt{x^2+y^2}} = -\lambda$$

$$\frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} = -\lambda$$

$$\frac{1}{2y\sqrt{\cancel{x^2}+y^2}} = \frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad x^2 = 2y^2$$

$$2y^3 = 16 \qquad y^3 = 8 \qquad \begin{cases} y = 2 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

calcolo $d(x,y)$ nei vari punti.
In questo caso il valore è lo stesso $\Rightarrow$ 2 punti di minima distanza

---

$$f(x,y,z) \qquad g(x,y,z) = 0$$

enunciato è lo stesso.

$$P(x_0,y_0,z_0) \qquad g(x_0,y_0,z_0) = 0$$

$$\nabla g(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

P estremo vincolato $\Rightarrow \exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}$

t.c. $(x_e, y_e, z_e, \lambda_0)$ è punto critico

di $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z)$

---

stesso significato:

$\nabla f(P)$ è parallelo al $\nabla g(P)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g = 0 \end{cases}$$

$f(x,y,z)$ $\qquad\qquad$ $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z)$

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ $\qquad J_g(x_0,y_0,z_0) =$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

in P J abbia rango 2.

<u>Per teorema funzione esplicita</u>: siano ad esempio le ultime due colonne linearmente indipendenti...

Allora posso esplicitare le variabili y e z in termini della variabile x.

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases} \qquad x \in \text{intorno di } x_0$$

[illegible]

$(x, \varphi(x), \psi(x))$ è un punto del vincolo vicino a P.

descrive una curva in $\mathbb{R}^3$)

se P è estremo vincolato

$\exists \; \lambda_0, \mu_0$ t. c. $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$

sia critico per la lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g_1(x,y,z) + \mu g_2(x,y,z)$$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) + \lambda \nabla g_1(x,y,z) + \mu \nabla g_2(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = g_1(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu} = g_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

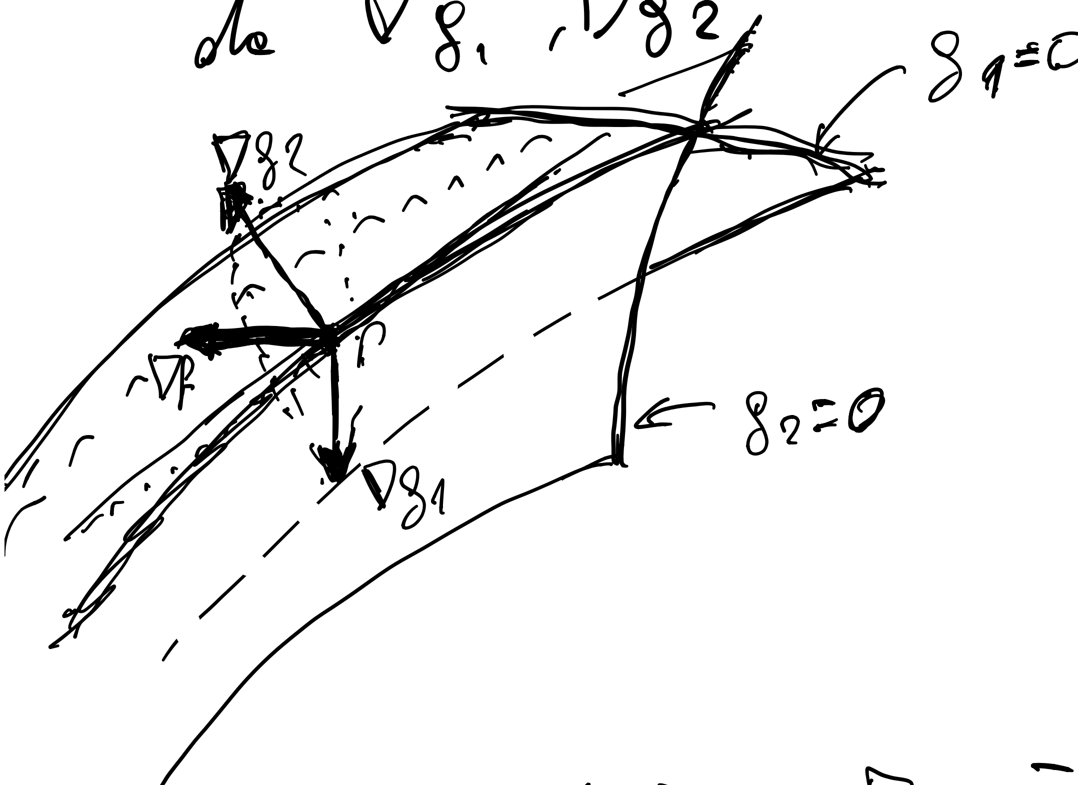
La prima dice che

$\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ è comb. lineare di

$\nabla g_1(x_0,y_0,z_0)$ e $\nabla g_2(x_0,y_0,z_0)$

$\Leftrightarrow$ ∇f sta nel piano generato

da ∇g_1, ∇g_2

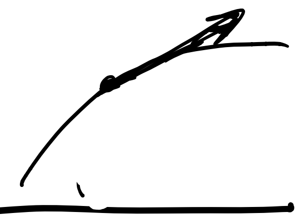


Il piano generato da ∇g_1 e ∇g_2 è ortogonale al vincolo; cioè è ortogonale alla retta tangente al vincolo oss se ho una curva nello spazio

$$t \to (x(t), y(t), z(t))$$ un vettore

tangente alla curva è dato da

$$(x'(t), y'(t), z'(t))$$



$$x \to (x, \varphi(x), \psi(x))$$ vincolo

ha vettore tangente $(1, \varphi'(x), \psi'(x))$. Si ha:

$$\begin{cases} g_1(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ g_2(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \end{cases}$$

per x in un intorno di x_0.

Come pure, le derivate devono essere nulle.

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial g_1}{\partial z} \psi'(x) = 0$$

$$\langle \nabla g_1 , (1, \varphi'(x), \psi'(x)) \rangle = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial g_2}{\partial z} \psi'(x) = 0$$

$$\langle \nabla g_2 , (1, \varphi'(x), \psi'(x)) \rangle = 0$$

quindi il piano generato da $\nabla g_1, \nabla g_2$ è ortogonale al vettore $(1, \varphi'(x), \psi'(x))$

Come prima, se P è estremo vincolato, allora $h(x) = f(x, \varphi(x), \psi(x))$ ha estremo in x_0. $\Rightarrow$

$$h'(x_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) + \frac{\partial f}{\partial y}(P) \varphi'(x_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P) \psi'(x_0) = 0$$

$$\langle \nabla f(P) , (1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)) \rangle = 0$$

Quindi $\nabla f(P)$ sta nel piano ortogonale al vettore $(1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0))$ che è quello di $\nabla g_1(P), \nabla g_2(P)$, ed è quindi combinazione lineare di $\nabla g_1(P), \nabla g_2(P)$.