7/9/2021

Scrivere chiaramente ogni risposta, riportando solo i conti necessari a giustificarla, iniziando col suo numero: 1,2, 3a, ecc., seguendo la numerazione degli esercizi. Tempo: 2 ore.

1. Data la sfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, scrivere l'espressione $d(x, y, z)$ della distanza di un punto $P \equiv (x, y, z)$ dalla superficie S. Determinare e classificare i punti critici della funzione $f(x, y, z) = \frac{1}{d(x,y,z)}$, definita per tutti gli $(x, y, z) \notin S$.

2. Determinare sulla sfera S i punti $P \equiv (x, y, z)$ che minimizzano la somma della distanza di P dal piano $z = 1$ e la distanza di P dal cilindro $x^2+y^2 = 1$.

3. Dati i punti $P_1 \equiv (1, 0)$, $P_2 \equiv (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$ siano r_1 ed r_2 le distanze di un punto $P \equiv (x, y)$ da P_1, P_2 rispettivamente (quindi $r_1 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$).

   (a) Descrivere il dominio del campo piano
   $$\vec{F} \equiv -(\frac{x-1}{r_1^3} + \frac{x+1}{r_2^3})\vec{i} - (\frac{y}{r_1^3} + \frac{y}{r_2^3})\vec{j}$$
   e dire se è semplicemente connesso (giustificandolo).

   (b) Dire (giustificandolo) se $\vec{F}$ è conservativo e trovarne eventualmente un potenziale.

4. Dato il cono $x^2+y^2 = z^2$ e l'iperboloide $x^2+y^2 = z^2+1$ dimostrare che l'area della corona circolare che si ottiene intersecando cono e iperboloide col piano $z = k$ è costante (non dipende da k).

   Dedurre che il volume della parte di spazio compresa tra il cono e l'iperboloide è infinito.

5. Consideriamo il cubo in $\mathbb{R}^3$ i cui vertici sono tutti i punti di coordinate (x_1, x_2, x_3) tali che x_i vale o 0 oppure 1.

   (a) Disporre 5 atomi A su 5 vertici del cubo, in modo che il gruppo di simmetria della molecola così ottenuta sia $\mathcal{C}_{3v}$.

   (b) Completare la tabella I per il carattere Γ della rappresentazione totale.

   (c) Scrivere la decomposizione di Γ in irriducibili usando la tabella II.

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
u_n	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0

(II)