Compito 6/2/2020

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola..............................

PRIMA PARTE

1. Determinare tutti i punti critici della funzione

$$f(x, y) = e^{x^3+x^2y+xy^2+y^3-x-y}$$

e classificarli.

2. Dati i punti $P \equiv (a, 0, 0)$, $Q \equiv (0, b, 0)$, $R \equiv (0, 0, c)$, $a, b, c > 0$, determinare (se esiste) il punto M del piano $x + y + z = 1$ tale che la somma dei quadrati delle distanze di M da P, Q, R rispettivamente sia minima.

3. Sia $\vec{F}(x, y)$ il campo piano con coordinate $\vec{F} \equiv (f(x), g(y))$, dove $f(x)$ è definita e differenziable su $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $g(y)$ è definita e differenziable su $\mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$.

   (a) Descrivere il dominio di $\vec{F}$ nel piano x, y.

   (b) Dimostrare che $\vec{F}$ è conservativo in ogni componente del dominio.

   (c) Dimostrare che i campi della forma $\vec{F} \equiv (f(x), g(y))$ sono gli unici campi conservativi $\vec{G} \equiv (G_1, G_2)$ tali che anche il campo $\vec{G'} \equiv (G_1, -G_2)$ è conservativo.

Nome e cognome (stampatello) ....;

matricola.............................

SECONDA PARTE

1. (a) Calcolare la massa del disco D_r di centro $0 \in \mathbb{R}^3$ e raggio r, fatto di un materiale avente densità $\delta(x, y, z) = e^{-k\rho}$, dove $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $k > 0$.

   (b) Dire se esiste e quanto deve valere k in modo che $\lim_{r\to\infty} Vol(D_r) = 1$.

2. Sia data una molecola avente i 3 atomi uguali nei punti $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 1)$, e inoltre altri n atomi $B_i i$ nel punto (i, i, i), $i = 1, \dots, n$.

   (a) Dire che ordine ha la rappresentazione totale Γ del gruppo di simmetria C_{3v} (in funzione di n).

   (b) Determinare il carattere (in funzione di n) della rappresentazione totale Γ completando la tabella (I) allegata;

   (c) Decomporre la rappresentazione Γ nelle componenti irriducibili, utilizzando la tavola di caratteri allegata (e la tabella (I));

   (d) [facoltativo] Supponiamo che un sistema a due gradi di libertà (x_1, x_2) abbia energia cinetica e potenziale date da

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2), \quad V = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2.$$

   Scrivere le coordinate normali del sistema.

	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
θ	...	...	...
$2cos(\theta) \pm 1$	...	...	...
u_n	...	...	...
$\chi(R)$	...	...	...

(I)

Si ricorda che il carattere della rappresentazione totale si determina considerando, per ogni elemento del gruppo, il numero u_n di atomi che rimangono al loro posto, e moltiplicando $(u_n) * (2cos(\theta) \pm 1)$ secondo che l'elemento sia una rotazione propria o impropria di angolo θ.

Γ_i	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
B	2	-1	0