<u>Teo</u> (1) $\vec{F}$ è conservativo

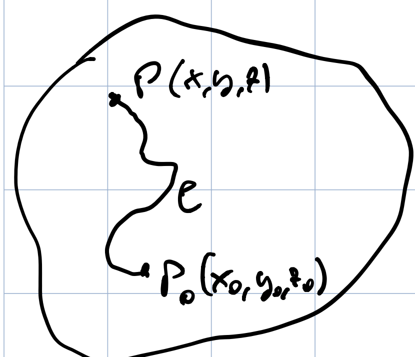
(2) $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \qquad \forall\, \mathcal{C}$ curva chiusa

(3) $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dipende solo dagli estremi di $\mathcal{C}$.

$(2) \Leftrightarrow (3) \qquad (1) \Rightarrow (3)$ visto.

$(3) \Rightarrow (1)$ <u>ip.</u> $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ dipende solo dagli estremi

<u>tesi</u> $\exists\, \varphi : D \to \mathbb{R}$ t.c. $\nabla \varphi = \vec{F}$



Fissiamo $P_0 \in D$

$\forall P \in D$ definiamo

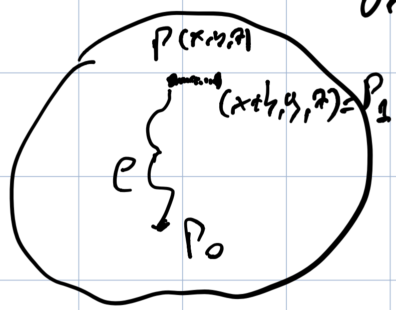
$$\varphi(P) = \varphi(x,y,z) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

dove $\mathcal{C}$ è una qualunque curva che connette P_0 a P. Per ipotesi, φ è ben definita.

Voglio verificare che $\nabla \varphi = \vec{F}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = F_3$$

Verifichiamo $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1$.



Rapporto incrementale rispetto a x:

$$\frac{\varphi(x+h,y,z)-\varphi(x,y,z)}{h} = (*)$$

per calcolare $\varphi(P_1) = \varphi(x+h,y,z)$ scelgo un cammino C_1 fatto da 2 pezzi: il primo = a C, il secondo il segmento PP_1

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{PP_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} =$$

$$(*) = \frac{1}{h} \int_{PP_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$PP_1 \begin{cases} \vec{r}(t) = (x+th, y, z) \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (h, 0, 0)$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}} \int_0^1 F_1(x+th, y, z)\cdot \cancel{h}\, dt$$

$$= \int_0^1 F_1(x+th, y, z)\, dt =$$

[Teo delle medie: f continua in $[a,b]$: $\int_a^b f(t)\,dt = (b-a) f(\xi)$]

$$= F_1(x+\theta h, y, z) \qquad \theta \in [0,1]$$

per $h \to 0$ $\quad F_1(x+\theta h, y, z) \xrightarrow{h \to 0} F_1(x,y,z)$ per la continuità di F_1.

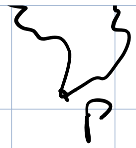
Avevamo visto che se $\vec{F}$ è conservativo allora

$\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$. Abbiamo visto esempi in cui non è sufficiente.

Alcune definizioni sui domini.

1) D connesso: $\forall P_1, P_2 \in D$ $\exists$ curva in D (differenziabile a tratti) che li unisce.

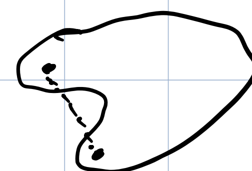
<u>esercizio</u> D t.c. $\exists P \in D$ che si può connettere con ogni altro punto Q di D. Allora D è connesso.



2) D <u>convesso</u>: $\forall P_1, P_2 \in D$, il segmento $\overline{P_1 P_2} \subset D$.

<u>esercizio</u> D convesso $\Rightarrow$ D connesso

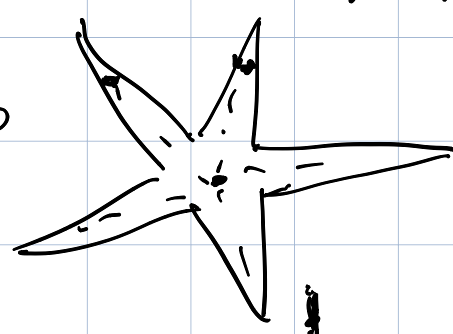
D connesso $\not\Rightarrow$ D convesso



3) D <u>STELLATO</u>: $\exists\, P \in D$ t.c. $\forall Q \in D$ $\overline{PQ} \subset D$

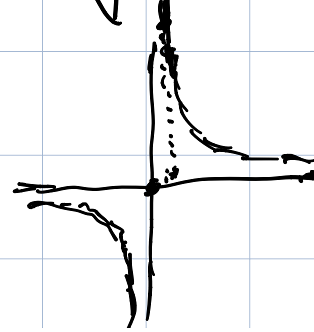
<u>esercizio</u> D convesso $\Rightarrow$ D stellato (rispetto a qualunque punto)

D stellato $\not\Rightarrow$ D convesso



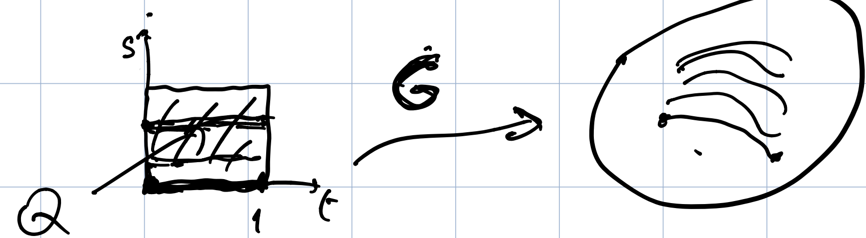
<u>es.</u> $D = \{ xy \le 1 \}$

è stellato? sì rispetto a $(0,0)$



4) curva in D: $\alpha : [0,1] \to D$ è chiusa se $\alpha(0) = \alpha(1)$

deformazione di α con continuità:



$$Q = \{ (t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le t \le 1,\ 0 \le s \le 1 \}$$

$G : Q \to D$ continua

$G(t,s)$

$$G(t,0) = \alpha(t)$$

$t \to G(t,s)$ sarà una curva in D

Dico che una curva chiusa α si contrae a un punto P in D se $\exists\, G : Q \to D$

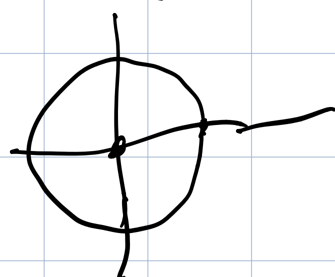
t.c. $\quad G(t,0)=\alpha(t),\ G(t,1)\equiv P \quad \forall t\in[0,1]$

$G(0,s)=G(1,s) \quad s\in[0,1]$ ← cioè ogni curva $t\to G(t,s)$ è chiusa

---

es. $\begin{cases} x = r\cos(2\pi t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(2\pi t) \end{cases} \quad t\in[0,1]$

$G(t,s)$



$G(t,0)=(r\cos(2\pi t),\ r\,\mathrm{sen}(2\pi t))$

$G(t,s)=\big((1-s)r\cos(2\pi t),\ (1-s)r\,\mathrm{sen}(2\pi t)\big)$

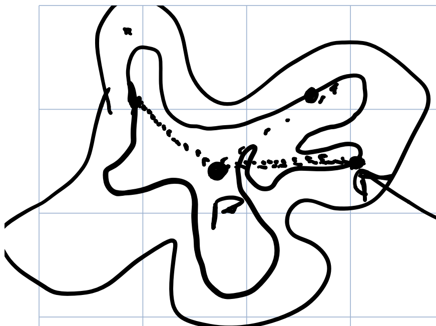
---

def. D dominio SEMPLICEMENTE CONNESSO se D è connesso e qualunque curva chiusa si può contrarre a 1 punto

---

es. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ sono semplic. connessi.

Un dominio stellato è semplicemente connesso:

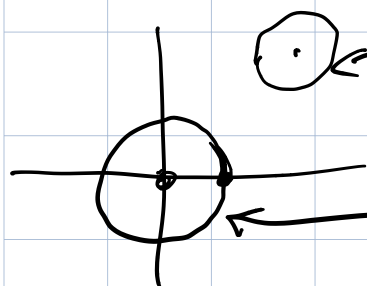


$\alpha: I \to D \quad (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$

$G(t,s) = ((1-s)\alpha_1(t), (1-s)\alpha_2(t))$

$P \equiv (0,0)$

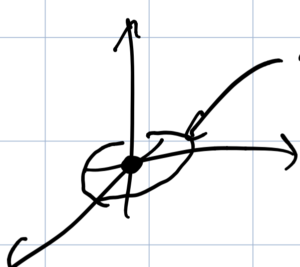
$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è sempl. connesso.



si deforma a un punto dentro D

non si deforma a un punto in D

in $\mathbb{R}^3$: $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è sempl. conn.?

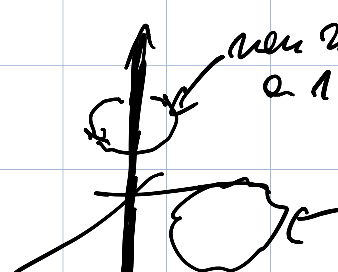


si può ridurre a 1 punto

D risulta semplic. connesso.

$D = \mathbb{R}^3 \setminus$ retta

non è sempl. connesso.



non si riduce a 1 punto

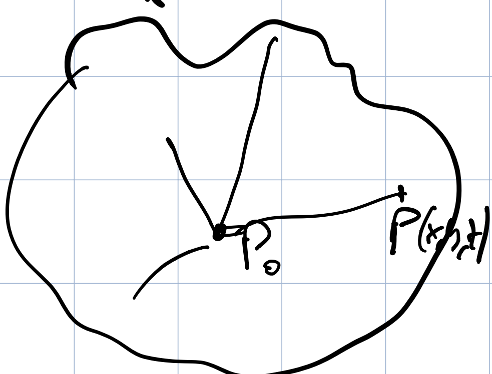
si riduce a un punto

Teorema D semplicemente connesso, $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ campo vettoriale t.c. $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$.

Allora $\vec{F}$ è conservativo.

---

dim (caso D stellato). $\exists\, P_0 \in D$ che "vede" tutti gli altri punti.



Prendiamo coordinate t.c. $P_0 \equiv (0,0,0)$.

Devo trovare una φ potenziale.

$$\varphi(P) = \varphi(x,y,z) = \int_{\overline{P_0P}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Devo dimostrare che $\nabla \varphi = \vec{F}$.

$\varphi(x,y,z) =$

1

$$\overline{P_0P}: \left\{ \vec{r}(t) = \begin{cases} tx \\ ty \\ tz \end{cases} \right.$$

$$= \int_0^1 \Big[F_1(tx,ty,tz)\,x + F_2(tx,ty,tz)\,y + F_3(tx,ty,tz)\,z\Big]\,dt$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (x,y,z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \Big[F_1(tx,ty,tz)\,x + F_2(tx,\dots)\,\dots\Big]\,dt =$$

$$\left[\;\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt\;\right]$$

sotto ipotesi "ragionevoli"

$$= \int_0^1 \Big[\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx,ty,tz)\,tx + F_1(\dots) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(\dots)\,ty + \frac{\partial F_3}{\partial x}(\dots)\,tz\Big]\,dt =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(F_1(tx,ty,tz)\big) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(\dots)\,t + \frac{\partial F_1}{\partial y}(\dots)\cdot 0 + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\dots)\cdot 0\right)$$

$$= \int_0^1 \Big[F_1(tx, ty, tz) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(tx, ty, tz)\, tx + \frac{\partial F_1}{\partial y}(tx, ty, tz)\, ty +$$

$$+ \frac{\partial F_1}{\partial z}(tx, ty, tz)\, tz \Big]\, dt =$$

$$g(t) = t\, F_1(tx, ty, tz)$$

$$g'(t) = [\ \cdots\ ] \quad \left(= F_1(\cdots) + t\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\cdots)\, x + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\cdots)\, y + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\cdots)\, z \right) \right)$$

$$= g(1) - g(0) = F_1(x, y, z)$$
