- soluzione 3° compitino -

PARTE I.

ES 1. Ricordiamo che $A>0$ significa che il prodotto scalare $\varphi(\underline{x},\underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$ è definito positivo.

1) no: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} < 0$ ma $A^2 = Id > 0$.

2) si: $A>0 \Rightarrow$ autovalori di $A>0 \Rightarrow$ autovalori di $A^2>0$ (sono i quadrati degli autovalori di A) $\Rightarrow A^2>0$

3) si: siccome A ha ordine 2, $\det A > 0$, $\operatorname{tr} A > 0$

$\exists$ autovalori di $A > 0$.

<u>Es 2</u>. 1) sì: sia $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$. Scegliamo un sottospazio di dim K W che contiene $\underline{v}$. Siccome $\varphi|_W > 0$ allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$

2) sì: stessa dim di 1).

3) sì: ricordiamo che φ è indefinito se è non degenere e non è definito. La condizione scritta non può verificarsi se φ è definito: in tal caso infatti $\varphi|_W$ è definito $\forall$ sottospazio W. Se φ è degenere, per ogni W t.c. $\dim(W \cap V^{\perp}) > 0$, $\varphi|_W$

è degenere. Se φ è indefinito: sia $\underline{v}$ un vettore isotropo $\neq \underline{0}$ (se φ è indefinito esiste!) Allora $\underline{v}^\perp \ni \underline{v}$ e si ha $\dim \underline{v}^\perp = n-1$, $\dim(\operatorname{Span} \underline{v}) = 1$.
Sia k in $1 \leq k \leq n-1$, e sia W un sottospazio di dim k t.c. $\underline{v} \in W \subset \underline{v}^\perp$.
Allora $W^\perp \supset (\underline{v}^\perp)^\perp = \operatorname{Span} \underline{v}$. Quindi $W \cap W^\perp \ni \underline{v}$, cioè $\varphi|_W$ è degenere e non può essere indefinita. Segue che l'unico caso in cui le condizioni si può verificare è: $k=n$, nel qual caso φ è indefinito per ipotesi.

NOTA: poiché questa domanda è risultata "un po' più difficile" del dovuto, la valutazione è stata: +1 per la risposta esatta, 0 per risposta errata o mancante.

---

4) sì: $\Rightarrow$ segue dalla def. di $\iota_-(\varphi)$; $\Leftarrow$ per def. di $\iota_-(\varphi)$ $\exists$ sottosp. U t.c. $\varphi|_U < 0$. Allora $\forall$ sottospazio $W \subset U$ $\varphi|_W < 0$; quindi se $\iota_+(\varphi) \leq \iota_-(\varphi)$ basta prendere W di dim $\iota_+(\varphi)$.

5) no: purché φ non sia il prodotto nullo, basta prendere $\underline{v}$ non isotropo; allora $\varphi|_{\mathrm{span}(\underline{v})}$ è non degenere (ricordiamo che si è dimostrato che $\varphi(\underline{v},\underline{v})=0 \ \forall \underline{v}\in V \Rightarrow \varphi=0$)

6) no: l'implicazione $\dim(W\cap V^\perp)>0 \Rightarrow \varphi|_W$ degenere è vera; viceversa, no: basta prendere φ indefinito e $W=\mathrm{Span}(\underline{v})$, con $\underline{v}$ isotropo.

7) sì: $\varphi|_W$ degenere $\Leftrightarrow \exists\, \underline{w}\in W, \underline{w}\neq\underline{0}$, t.c. $\varphi(\underline{w},\underline{w}')=0 \ \forall \underline{w}'\in W \Leftrightarrow$ $\exists\, \underline{w}\in W, \underline{w}\neq\underline{0}$, t.c. $\underline{w}\in W^\perp \Leftrightarrow \dim(W\cap W^\perp)>0$

__Es. 3.__ 1) sì: $\varphi(p(x),p(x)) = p(-1)^2+p(0)^2+p(1)^2 \geq 0$.

Per essere $=0$ deve essere $p(-1)=p(0)=p(1)=0$; siccome grado$(p(x))\leq 2$ questo implica $p=0$ (un polinomio di grado ≤ 2 ha al max 2 radici a meno che $\varphi \equiv 0$).

2) no: un prodotto definito non ha vettori isotropi

3) no: $\varphi > 0 \Rightarrow \varphi$ non degenere.

4) sì: $\varphi(-p(x), q(x)) = \varphi(p(x), -q(x))$ si verifica subito.

5) sì: $\varphi(p(-x), q(x)) = p(-1)\,q(1) + p(0)\,q(0) + p(1)\,q(-1)$ $=$

$\varphi(p(x), q(-x)) = p(1)\,q(-1) + p(0)\,q(0) + p(-1)\,q(1)$

<u>Es 4.</u>

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$|s(A)| = 2$, $|s(\tilde{A})| = 1$

$rg\,\tilde{A} = 3$, $\det A > 0$

è un'ellisse reale: forma canonica $x^2 + y^2 = 1$

PARTE II

Esercizio 1.

1) $\varphi_A(X+X', Y) = \mathrm{tr}\, {}^t(X+X') A Y = \mathrm{tr}\, ({}^tX + {}^tX') A Y =$

$= \mathrm{tr}({}^tX A Y + {}^tX' A Y) = \mathrm{tr}\, {}^tX A Y + \mathrm{tr}\, {}^tX' A Y = \varphi_A(X, Y) + \varphi_A(X', Y')$

$\varphi_A(\alpha X, Y) = \mathrm{tr}\, {}^t(\alpha X) A Y = \mathrm{tr}(\alpha\, {}^tX) A Y = \mathrm{tr}\, \alpha\, {}^tX A Y = \alpha\, \mathrm{tr}\, {}^tX A Y$

$= \alpha\, \varphi(X, Y)$

Similmente per la seconda componente.

$\varphi_A(X,Y) = \mathrm{tr}\, {}^tX A Y = \mathrm{tr}\, {}^t({}^tX A Y)$ (perché $\mathrm{tr}\, M = \mathrm{tr}\, {}^tM$ $\forall$ matrice)

$= \mathrm{tr}\, {}^tY\, {}^tA X = \mathrm{tr}\, {}^tY A X = \varphi_A(Y, X)$

2) Una base per S è data dalle matrici

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una base per T è data dall'unica matrice $t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Si ha che $S \perp T \iff \varphi_A(s_i, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ una generica matrice simmetrica. Si ha:

$$A\,t = \begin{pmatrix} -c & a \\ -b & c \end{pmatrix} \qquad e$$

$${}^t s_1 A t = \begin{pmatrix} -c & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^t s_2 A t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & c \end{pmatrix} \qquad {}^t s_3 A t = \begin{pmatrix} -b & c \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$tr({}^t s_1 A t) = -c \qquad tr\, {}^t s_2 A t = c \qquad tr\, {}^t s_3 A t = a - b$$

Quindi deve essere $c=0$, $a=b$, quindi $A=aI$

3) Rispetto alla base $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ di V, la matrice associata a φ_A risulta (Facili conti):

$$M(\varphi_A) = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right] \in M_4(\mathbb{R})$$

Se $P \in M_2(\mathbb{R})$ diagonalizza A per congruenza: ${}^tPAP = D$ diagonale, allora la matrice a blocchi:

$$\left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right]$$ diagonalizza

$M(\varphi_A)$ riducendola a: $\left[\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right]$. Quindi

$$\iota_+(\varphi_A) = 2\,\iota_+(A); \quad \iota_-(\varphi_A) = 2\,\iota_-(A); \quad \iota_0(\varphi_A) = 2\,\iota_0(A).$$

[nota: questo punto si può risolvere anche in maniera "più astratta" senza far uso della matrice associata]

Esercizio 2. 1) Ad es.: $\underline{v}_1 = \underline{v}$, $\underline{v}_2 = \underline{e}_1$, $\underline{v}_2 = \underline{e}_2$. Definiamo

ad es.: $$M_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per costruzione $\psi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

2) Si ha $\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1) = \varphi(\underline{v}_2, \underline{v}_2) = 0$, $\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = 1$, quindi

$$\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = 2 , \quad \varphi(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = -2 , \quad \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 , \underline{v}_1 - \underline{v}_2) = 0$$

Inoltre $\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_3) = \varphi(\underline{v}_2, \underline{v}_3) = 0$ $\quad (a_{13} = a_{23} = 0)$

Quindi una base ortogonale è:

$$\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si può prendere $\underline{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$, $\underline{y}_2 = \underline{v}_3$ $\quad \underline{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$,

e rispetto a questa base la matrice associata a φ diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$$

3) Il prodotto è indefinito di segnatura $(2,1,0)$.

Un vettore $\underline{v} = x_1 \underline{u}_1 + x_2 \underline{u}_2 + x_3 \underline{u}_3$ è isotropo $\Leftrightarrow$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

Quindi le coordinate $[\underline{v}]$ dei vettori isotropi formano un cono in $\mathbb{R}^3$; geometricamente la risposta è ovvia:

- il cono dei vettori isotropi non è contenuto in un piano, quindi contiene 3 vettori lin. indip. (una base);
- il cono separa $\mathbb{R}^3$ in due componenti connesse: una di queste contiene le coordinate $[\underline{v}]$ dei vettori $\underline{v}$ t.c. $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$; l'altra componente contiene le coordinate $[\underline{v}]$ dei vett. $\underline{v}$ t.c.

$\varphi(\underline{v},\underline{v}) < 0$. Per ottenere delle basi con le proprietà richieste basta prendere 3 vettori indipendenti in ognuna delle suddette componenti.

Esplicitamente (ad es., le scelte sono infinite)

I caso: $\underline{w}_1 = \underline{u}_1$, $\underline{w}_2 = \underline{u}_2$, $\underline{w}_3 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3$

II caso: $\underline{w}_1 = \underline{u}_3$, $\underline{w}_2 = u_1 + 2u_3$, $\underline{w}_3 = \underline{u}_2 + 2\underline{u}_3$

III caso: $\underline{w}_1 = \underline{u}_1 + \underline{u}_3$, $\underline{w}_2 = \underline{u}_2 + \underline{u}_3$, $\underline{w}_3 = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \sqrt{2}\,\underline{u}_3$

4) $H = v^{\perp} = (\operatorname{Span}(\underline{v}))^{\perp} \supseteq \operatorname{Span} \underline{v}$ perché $\underline{v}$ è isotropo (e quindi $\underline{v} \perp \underline{v}$). Passando agli ortogonali si ha:

$H^{\perp} = \operatorname{Span} \underline{v}$ (perché φ è non degenere e quindi $\forall$ W vale $(W^\perp)^\perp = W$). Allora

$H \cap H^\perp = H^\perp = \mathrm{Span}(\underline{v})$ ha dim > 0 e quindi $\varphi|_H$

è degenere.

5) Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in K$ isotropi indipendenti (quindi sono base di K).
La matrice di $\varphi|_K$ rispetto ad essi ha la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

Quindi $\varphi|_K$ è degenere $\iff a = 0 \iff \varphi|_K$ è il prodotto nullo.

Ma $i_+(\varphi|_K) \geq 1$ perché (per Grassmann)

$$\dim\left(K \cap \operatorname{Span}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}\right) > 0$$

[provare a dare una dimostrazione senza uso della matrice associata a $\varphi|_K$]