Soluzione parte II del compitino

(con alcune variazioni e commenti)

PARTE II

Esercizio 1

1) Basta che $U \not\subset \Pi_\lambda$. In tal caso si ha infatti $U + \Pi_\lambda \supsetneq \Pi_\lambda$; siccome $\dim \Pi_\lambda = 2$, si ha:

$\dim(U + \Pi_\lambda) = 3$, cioè $U + \Pi_\lambda = \mathbb{R}^3$. Inoltre

$U \cap \Pi_\lambda = \{\underline{0}\}$ perché $U \cap \Pi_\lambda \subsetneq U$, e U ha dimensione 1.

I λ per cui si ha somma diretta sono quindi quelli per cui $\underline{u}$ non verifica l'equazione di Π_λ:

$\lambda - (1-\lambda) - 2 = 2\lambda - 3 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 3/2$.

Per $\lambda = 3/2$, $U \subset \Pi_{3/2}$.

2) e). Occorre dim. che se $f, g \in \mathcal{F}_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\alpha f + \beta g \in \mathcal{F}_\lambda$. $\forall\ \underline{v} \in U$, $\underline{w} \in \Pi_\lambda$, si ha

$$(\alpha f + \beta g)(\underline{v}) = [\text{per def. di somma di appl. lineari}] = (\alpha f)(\underline{v}) + (\beta g)(\underline{v})$$

$$= [\text{per def di prodotto di un numero con un'appl. lineare}]$$
$$= \alpha(f(\underline{v})) + \beta(g(\underline{v}))$$

Per ipotesi $f(\underline{v}), g(\underline{v}) \in U$, che è sottosp. vettoriale (quindi chiuso per combin. lineari) e allora $\alpha(f(\underline{v})) + \beta(g(\underline{v})) \in U$.

Esattamente allo stesso modo si dimostra $\alpha(f(\underline{w}))+\beta(g(\underline{w}))\in\Pi_\lambda$.

Quindi $\alpha f+\beta g$ manda U in U e Π_λ in Π_λ, cioè:
$\alpha f+\beta g\in \mathcal{F}_\lambda$.

b) Per $\lambda\neq 3/2$ $\mathbb{R}^3=U\oplus\Pi_\lambda$, quindi possiamo scegliere una base $\mathcal{B}=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ con $\underline{v}_1$ base di U e $\{\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ base di Π_λ. Rispetto a tale base la matrice associata ad una qualunque $f\in\mathcal{F}_\lambda$ assume la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

e viceversa: se f ha una tale matrice rispetto a $\mathcal{B}$, allora manda $\underline{v}_1$ in un suo multiplo, $\underline{v}_2$ in una combinazione di $\underline{v}_2, \underline{v}_3$, e $\underline{v}_3$ in una combinazione di $\underline{v}_2, \underline{v}_3$; quindi f manda U in sé e Π_λ in sé.
Si ha così un isomorfismo tra $\mathcal{F}_\lambda$ e le matrici di tale forma; la dimensione è pertanto 5.

Se $\lambda = 3/2$, $U \subset \Pi_\lambda$, quindi scegliamo una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ con $\underline{v}_1$ base di U, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base di Π_λ (e $\underline{v}_3$ indip. da $\underline{v}_1, \underline{v}_2$).

La matrice di una $f \in \mathcal{J}_{3,2}$ assume ora la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

e analogamente all'argomento precedente una f che abbia una tale matrice rispetto a $\mathcal{B}$ manda U in sé e Π_λ in sé. In questo caso la dimensione è 6.

Esercizio 2

1) Si ha
$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -2 & y+z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & y \\ 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 0 & x+y+z \end{array}\right]$$

Quindi $\operatorname{rg} A = 2$ e $\dim \ker A = 1$

base $\ker A$: $\{(7, -4, 2)\}$

eq. cartesiane: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{0}$, cioè: $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Im} f$ ha base le colonne di A corrispondenti ai pivot:

base di $\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$.

Eq. cartesiane per $\operatorname{Im} f$: $\quad x+y+z=0$

Per ${}^tA$: $\quad \operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A = 2$, dim Ker ${}^tA = 1$.

O si fanno conti analoghi sulla matrice ${}^tA$; oppure si osserva (esercizio) :

- una base per Ker ${}^tA$ $\longleftrightarrow$ coefficienti delle eq. cartesiane per Im A

e analogamente:

- una base per Ker A $\longleftrightarrow$ coeff. delle eq. cartesiane per Im ${}^tA$

Allora:

base di $\ker {}^tA = \left\{ {}^T[1,1,1] \right\}$

eq. cartesiana di $\operatorname{Im} {}^tA$: $\quad 7x - 4y + 2z = 0$

eq. cartesiana di $\ker {}^tA$: $\quad \begin{cases} y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

base di $\operatorname{Im} {}^tA$: 2 righe indipendenti di A :

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{D}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$A(\alpha B_1 + \beta B_2) = \alpha AB_1 + \beta AB_2 = 0$$

per la distributività del prodotto

perché $AB_1 = 0$ e $AB_2 = 0$ per ipotesi.

Quindi $\mathcal{D}$ è sottosp. vett.

Se $AB = 0 \Rightarrow AB^j = 0$ per ogni vettore colonna di B, quindi $B^j \in \mathrm{Span}\{{}^t[7,-4,2]\}$. Allora ogni $B \in \mathcal{D}$ è della forma

$$B = \left[\alpha \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \beta \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \gamma \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right] \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

cioè $\mathcal{R}$ ha dimensione 3 e una base:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3) Analogamente si dim. che $\mathcal{S}$ è sottosp. vett. e si osserva che se $BA = 0$ allora ogni riga di B soddisfa $B_i A = 0$, quindi:

$B_i \in \mathrm{Span}\{[1, 1, 1]\}$.

Anche qui quindi $\dim \mathcal{S} = 3$ e una base è:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per $B \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ si deve avere:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & \beta \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\delta & 7\varepsilon & 7\mu \\ -4\delta & -4\varepsilon & -4\mu \\ 2\delta & 2\varepsilon & 2\mu \end{bmatrix}$$

che dà: $\delta = \varepsilon = \mu = \dfrac{\alpha}{7} = -\dfrac{\beta}{4} = \dfrac{\gamma}{2}$.

Quindi

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Si poteva osservare: $B \in \mathcal{S} \cap \mathcal{O} \implies$

$$\operatorname{Im} B = \operatorname{Col}(B) \subset \operatorname{Ker} A \,, \qquad \operatorname{Im} A = \operatorname{Col}(A) \subset \operatorname{Ker} B$$

quindi B (vista come appl. lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) manda base di $\operatorname{Im} A$ in 0, e un altro vett. indip. in $\operatorname{Ker} A$. Quindi $\dim \mathcal{S} \cap \mathcal{O} = 1$