Parte I

1. Questo tipo di esercizi si risolve facilmente calcolando alcuni determinanti principali.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$: $\det A = -1$: deve esserci per forza 1 autovalore >0 e 1 autovalore <0, quindi $i_+(A) = 1$, $i_-(A) = 1$, $i_0(A) = 0$;

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\det A = -1$: potrebbe essere o 1 autovalore <0 e gli altri due >0, oppure tutti e 3 gli autovalori <0.

Quest'ultima possibilità è esclusa dal fatto che $a_{11} = {}^t e_1 A e_1 = 0$ e quindi il prodotto non è definito. Segue $\sigma = (2, 1, 0)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $rg\, A = 2$ quindi $\iota_0(A) = 1$. Il det fatto con

le righe e colonne di indici $1, 3$ è $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} < 0$, quindi

$\varphi_A |_{\text{Span}\{\underline{e}_1, \underline{e}_3\}}$ ha indice di positività 1 e di negatività 1.

Quindi $\exists\ \underline{v}, \underline{w} \in \text{Span}\{\underline{e}_1, \underline{e}_3\}$ t.c. $\varphi_A|_{\text{Span}\{\underline{v}\}} > 0$ e $\varphi_A|_{\text{Span}\{\underline{w}\}} < 0$

Quindi $\iota_+(A) = 1$, $\iota_-(A) = 1$

[stiamo sfruttando l'osservazione: se $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare e $W \subset V$ è un sottospazio, allora $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$, $\iota_-(\varphi) \geq \iota_-(\varphi|_W)$. Attenzione: non è vero per ι_0: controesempio: φ non degenere ma avente vettori isotropi]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \det A = 0 \,, \quad \det A^{12}_{12} = -1 \implies \sigma = (1,1,1)$$

Infatti: $\operatorname{rg} A = 2 \implies i_0(A) = 1$, e in maniera del tutto analoga al caso precedente si deduce $\varphi_A|\operatorname{span}\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ ha indice di positività e di negatività $= 1$ e lo stesso quindi per $i_+(A), i_-(A)$.

2 - (i) $B = A^* A$, $B^* = (A^* A)^* = A^* (A^*)^* = A^* A = B$.

$\underline{x}^* A^* A \underline{x} = (A\underline{x})^* A\underline{x} \geq 0$, perché il prodotto hermitiano canonico è definito positivo (quindi se $A\underline{x} \neq \underline{0}$ viene > 0).

(ii) Ovviamente $\ker A \subset \ker B$. Viceversa se $B\underline{x} = \underline{0}$, si ha:

$\underline{x}^* B \underline{x} = 0$ cioè $\underline{x}^* A^* A \underline{x} = (A\underline{x})^* A\underline{x} = \underline{0}$ e quindi $A\underline{x} = 0$ perché il prodotto hermitiano canonico è > 0.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ha segnatura $(1,1,0)$ quindi SI. Es: ${}^t\underline{x} A \underline{x} =$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 3x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$ si può prendere

$(x_1, x_2) = (1, -1)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ è singolare, quindi SI, basta prendere un vettore in ker A

es: $(2, -1)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ det $A > 0$, $a_{11} > 0 \Rightarrow A > 0$ (criterio minori principali, quindi NO.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma(A) = (2, 1, 0)$ quindi SI: es: $a_{11} = 0$

quindi basta prendere $(1, 0, 0)$

Parte II

Esercizio 1   1. Se $\varphi(\underline{v},\underline{w})=0$, $\psi(\underline{v},\underline{w})=0$ $\forall\, \underline{v}\in V, \underline{w}\in W$

allora $(\varphi+\psi)(\underline{v},\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{w})+\psi(\underline{v},\underline{w}) = 0+0=0$.

$(\alpha\varphi)(\underline{v},\underline{w}) = \alpha\cdot\varphi(\underline{v},\underline{w}) = \alpha\cdot 0 = 0$.

Una matrice A è del tipo $M_B(\varphi)$ per $\varphi\in S \iff$

$a_{13} = \varphi(\underline{e}_1,\underline{e}_3) = a_{31} = 0$ e

$a_{23} = \varphi(\underline{e}_2,\underline{e}_3) = a_{32} = 0$ e $a_{ij}=a_{ji}$

(due sottospazi sono ortogonali $\iff$ ogni vettore di una base del primo è ortogonale ad ogni vettore di una base del secondo)

Quindi $\dim S = 4$.

2. Basta prendere un prodotto φ che abbia come matrice associata

rispetto alla base canonica sia $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ con $a, b > 0$, $c < 0$

nel primo caso:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = (1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = a + 4b + 9c = 0$$, quindi si

prende $a = 5$, $b = 1$, $c = -1$.

Nel secondo caso si prende $a > 0$, $b, c < 0$ e allora

si può prendere $a = 13$, $b = c = -1$

Esercizio 2. 1. $\varphi(f(p(x)), q(x)) = \int_0^1 p(1-x) q(x)\, dx =$

[facendo il cambiamento $1 - x = t$]

$$= \int_1^0 f(t)\, g(1-t)\, (-dt) = \int_0^1 f(t)\, g(1-t)\, dt = \varphi(p(x), f(q(x)))$$

Sia $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canonica di V. Allora

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

perché:

$f(1) = 1$

$f(x) = 1-x$

$f(x^2) = (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$

$f(x^3) = (1-x)^3 = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

La matrice è triangolare quindi gli autovalori sono 1 e -1 con molteplicità 2. Per calcolare gli autovettori: per $\lambda = 1$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

quindi $\ker A - I = \operatorname{Span} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

quindi l'autospazio

$$V_1 = \operatorname{Span}\{1, x^2 - x\}$$

e similmente per $\lambda = -1$

$$A+I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ker A+I = \operatorname{Span} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

quindi $V_{-1} = \operatorname{Span}\left\{ -\frac{1}{2} + x \;, \; \frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3 \right\}$

Sappiamo che $V_1 \perp V_{-1}$ per teo. spettrale. Bisogna ortogonalizzare la base di V_1 e quella di V_{-1}.

Sia $p(x) = x^2 - x$: ortonormalizzo

$$q(x) = p(x) - \frac{\varphi(p(x), 1)}{\varphi(1,1)} \cdot 1 = x^2 - x - \frac{\int_0^1 x^3 - x \, dx}{\int_0^1 1 \, dx}$$

$= x^2 - x + \frac{1}{6}$. Dividendo per la norma si trova che in V_1 la base ortogonale è: 1, $\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) 3\sqrt{10}$

Per V_{-1}, sostituiamo $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ con

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4} - \frac{\int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} \left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}$$

Dividendo per la norma una base ortonormale di V_{-1} risulta

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) 2\sqrt{3}, \quad \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}\right) \sqrt{7} \cdot 20$$

2. Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base ortonormale di autovettori per f (Teorema spettrale) relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (con eventuali ripetizioni). Allora se $\underline{v} = \sum x_i \underline{v}_i$ si ha:

$$\psi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \psi\left(f\left(\sum x_i \underline{v}_i\right), \sum x_j \underline{v}_j\right) = \psi\left(\sum x_i \lambda_i \underline{v}_i, \sum x_j \underline{v}_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

da cui segue subito: se $\lambda_i > 0$ $\forall i$ allora $\psi(f(\underline{v}), \underline{v}) > 0$ $\forall \underline{v}$

Se $\psi(f(\underline{v}), \underline{v}) > 0$ $\forall \underline{v} \Rightarrow \psi(f(\underline{v}_i), \underline{v}_i) = \lambda_i > 0$.

[Facoltativo]. Sia $W = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}$ la decomposizione di W in autospazi.

Se $\underline{v} = \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k$, $\underline{v}_i \in V_{\lambda_i}$, allora

$$\|\underline{v}\|^2 = \|\underline{v}_1\|^2 + \cdots + \|\underline{v}_k\|^2 \quad \text{(teo. di Pitagora)}$$

$$\psi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \psi(f(\underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k), \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k) =$$
$$= \psi(\lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{v}_k, \underline{v}_1 + \cdots + \underline{v}_k) = \lambda_1 \|\underline{v}_1\|^2 + \cdots + \lambda_k \|\underline{v}_k\|^2 \geq$$
$$\geq \lambda_1 (\|\underline{v}_1\|^2 + \cdots + \|\underline{v}_k\|^2) = \lambda_1 \|\underline{v}\|^2$$

e = vale $\iff \underline{v}_2 = \cdots = \underline{v}_k = 0$

da cui si conclude.