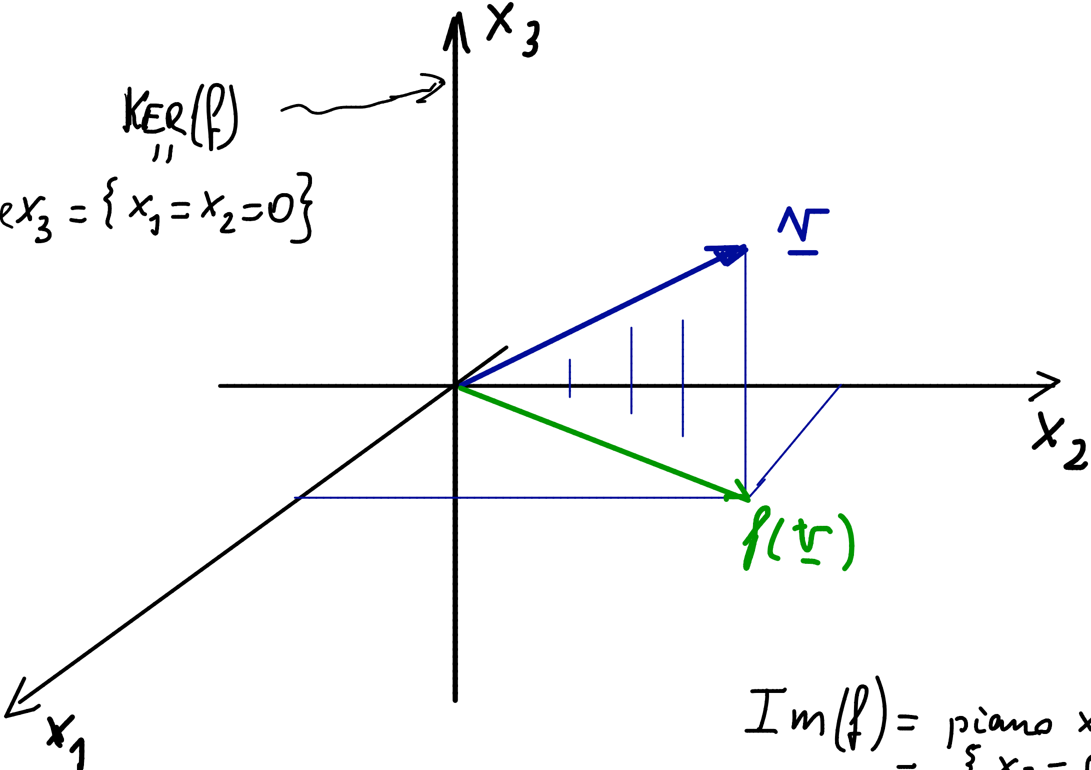
Lezione del 7/11/2013

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

proiezione sul piano x_1, x_2

$\mathrm{KER}(f)$
$\parallel$
asse $x_3 = \{ x_1 = x_2 = 0 \}$



$\mathrm{Im}(f) =$ piano $x_1 x_2 =$
$= \{ x_3 = 0 \}$

Teorema [formula delle dimensioni]. $f: V \longrightarrow W$ lineare.

Allora

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}$$

---

dim. Prendiamo una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s\}$ di $\operatorname{Ker} f$ ed estendiamola a una base di V: $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_s, \underline{v}_{s+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ $(n = \dim V)$. Siano $\underline{w}_{s+1} = f(\underline{v}_{s+1}), \dots, \underline{w}_n = f(\underline{v}_n)$. Dimostriamo che i $\underline{w}_i$ sono una base di $\operatorname{Im}(f)$. Infatti, se $\underline{w} \in \operatorname{Im} f$ allora $\exists\, \underline{v} \in V$ t.c. $\underline{w} = f(\underline{v})$. Scrivendo $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$ si trovano coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c. $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_s \underline{v}_s + \alpha_{s+1} \underline{v}_{s+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$ e applicando f:

$$\underline{w} = f(\underline{v}) = f(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) = \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_s f(\underline{v}_s) + \alpha_{s+1} f(\underline{v}_{s+1}) + \dots + \alpha_n f(\underline{v}_n) =$$

$$= \alpha_{s+1} \underline{w}_{s+1} + \dots + \alpha_n \underline{w}_n$$ che prova $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Span}\{\underline{w}_{s+1}, \dots, \underline{w}_n\}$

(l'inclusione opposta $\operatorname{Im} f \supset \operatorname{Span}\{\underline{w}_{s+1}, \dots, \underline{w}_n\}$ è ovvia essendo $\underline{w}_j \in \operatorname{Im} f$).

I $\underline{w}_j$ sono indipendenti: infatti da:

$$\alpha_{s+1} \underline{w}_{s+1} + \dots + \alpha_n \underline{w}_n = \underline{0}$$ segue

$$\alpha_{s+1} f(\underline{v}_{s+1}) + \dots + \alpha_n f(\underline{v}_n) = f(\alpha_{s+1} \underline{v}_{s+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) = \underline{0}$$

quindi $\alpha_{s+1}\underline{v}_{s+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \in \operatorname{Ker} f$, e quindi $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ t.c.

$$\alpha_{s+1}\underline{v}_{s+1} + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_s \underline{v}_s$$

ed essendo i $\underline{v}_i$ una base di V segue che tutti gli α_i sono nulli (in particolare sono nulli gli $\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_n$) —

esempio $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ l'appl. lineare data da $f(\underline{x}) = A\underline{x}$.

i) Si riduca A a scala, $A \sim S$.

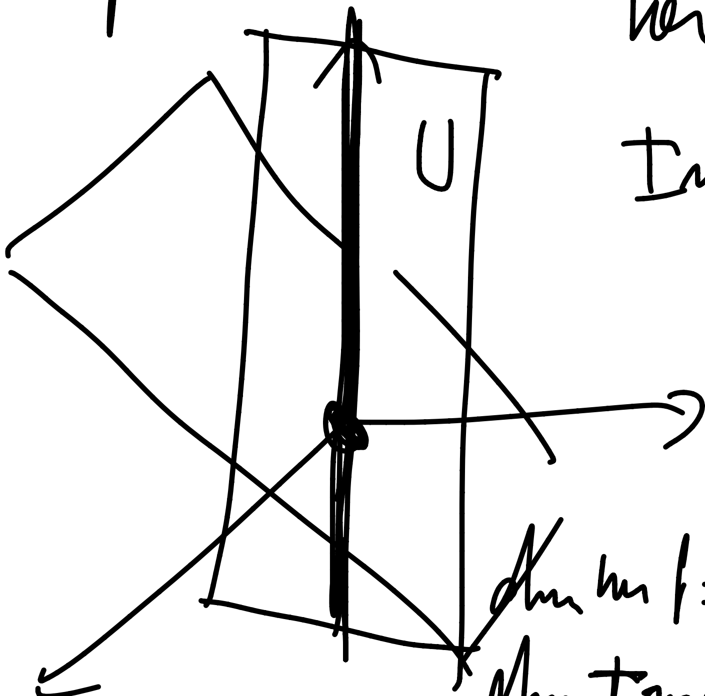
(ii) La base di $\operatorname{Im} f = \mathcal{C}(A)$ è data dalle colonne di A che contengono i pivot: $A^{j_1}, \dots, A^{j_K}$. Vettori di $\mathbb{K}^n$ che hanno immagini tali colonne sono ad es.: $\underline{e}_{j_1}, \dots, \underline{e}_{j_K}$ (ogni altro si ottiene da questi aggiungendo vett. in $\operatorname{Ker} f$)

(iii) $\underbrace{\text{Si trovi base di } \operatorname{Ker} f}$, $\underbrace{\text{mediante l'algoritmo indicato}}$ (cioè delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{0}$): $\underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_{n-K}}$

NOTARE: $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} A$, quindi si ritrova: $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\} = n - rg(A)$.

---

nell'esempio della proiezione:



$\ker f = \{x_1 = x_2 = 0\}$

$\operatorname{Im} f = \{x_3 = 0\}$

$\dim \ker f = 1$

$\dim \operatorname{Im} f = 2$

Corollario $\dim \operatorname{Im} f = \dim f(V) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$

(cioè $\dim V$ diminuisce, applicando f, di tanto quanto è la $\dim \operatorname{Ker} f$)

Corollario Sia $U \subset V$ sottosp. vettoriale. Allora

$$\dim f(U) = \dim U - \dim(\operatorname{Ker} f \cap U)$$

---

dim Applichiamo la formula alla restrizione di f a U

$$f|_U : U \longrightarrow W \qquad (\text{eser: } f|_U \text{ è lineare})$$

$$\dim \operatorname{Ker} f|_U + \dim \underbrace{\operatorname{Im} f|_U}_{f(U)} = \dim U$$

Ma:

In generale $\quad f : X \to Y$ applicazione

$ \cup$

$ Z$ sottoinsieme

def RESTRIZIONE di f a Z è

l'applicazione $f|_Z : Z \longrightarrow Y$

$$f|_Z(x) = f(x) \qquad \text{se } x \in Z$$

$\mathrm{Im}\, f|_U = f(U)$,

$\mathrm{Ker}\, f|_U = \{\underline{v} \in U \mid f(\underline{v}) = \underline{0}\} = \{\underline{v} \in U \mid \underline{v} \in \mathrm{Ker} f\} = \mathrm{Ker} f \cap U$

da cui:

$$\dim(\mathrm{Ker} f \cap U) + \dim f(U) = \dim U$$

<u>Corollario</u>. Se U è un complementare di $\mathrm{Ker} f$ (cioè $U \oplus \mathrm{Ker} f = V$) allora $f|_U : U \longrightarrow W$ è bigettiva su $f(U)$.

<u>dim</u> $f|_U$ è iniettiva perché $\mathrm{Ker}\, f|_U = \mathrm{Ker} f \cap U = \{\underline{0}\}$ per ipotesi.

Vedi prop. segnente ⟶

PROPOSIZIONE. $f: V \to W$ lineare. Allora

f è INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

---

dim $\Rightarrow$ ip. f iniettiva. Sappiamo che $f(\underline{0}) = \underline{0}$.

quindi non può esserci un altro $\underline{v}$ t.c. $f(\underline{v}) = \underline{0}$

$\Leftarrow$ Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ t.c. $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2)$.

Allora $f(\underline{v}_1) - f(\underline{v}_2) = \underline{0}$

$\Rightarrow f(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = \underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\}$

quindi $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$.

Def $f: V \to W$ lineare si dice <u>ISOMORFISMO</u> se è INIETTIVA E SURGETTIVA

Due spazi si dicono isomorfi se c'è un isomorfismo tra i due.

Il coroll. precedente si può tradurre dicendo che se $U \oplus \ker f = V \Rightarrow U$ è isomorfo a $f(U)$

[e in generale: $U \cap \ker f = \{\underline{0}\} \Longrightarrow f|_U$ è isomorfismo tra U e $f(U)$]

Proposizione Sia $f: V \longrightarrow W$ app. lineare tra spazi della stessa dimensione. Allora f è iniettiva $\Longleftrightarrow$ è surgettiva $\Leftrightarrow$ è isomorfismo.

dim $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

f iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\ker f = \{\underline{0}\}$ $\Longleftrightarrow$ $\dim(\ker f) = 0$

se f iniettiva $\Rightarrow$ $\dim \operatorname{Im} f = \dim V = \dim W$

da $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$ si ha $\operatorname{Im} f = W$, quindi f surgettiva.

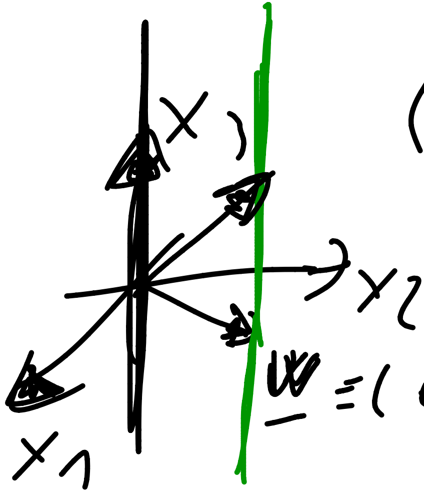
Viceversa se $\operatorname{Im} f = W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim W = \dim V$

quindi $\dim \ker f = \underline{0}$

$\Rightarrow f$ iniettiva

esercizio $f: V \to W$ surgettiva. Quali sono i sottosp. $U \subset V$ t.c. $f|_U : U \to W$ sia isomorfismo?

es $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$



$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$$

$$f^{-1}(\underline{w}) = \{(a, b, x_3)\}.$$

esers. 1) $f: V \to W$ surgettive $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$.

dim: $f(V) = \operatorname{Im} f = W$ per ipotesi. $\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim W$

$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f + \dim W$

esers. 2. $f: V \to W$ iniettiva.

$\Rightarrow \dim V \leq \dim W$

dim: $\ker f = \{\underline{0}\} \Rightarrow \dim(\ker f) = 0$

$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f$ sottosp. di $W \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \leq \dim W$

eser 3 f iniettiva e surg. $\Rightarrow \dim V = \dim W$

Teorema

$f : V \longrightarrow W$ lineare.

Sia $\mathcal{B} = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ base di V. Allora f è

DETERMINATA DALLA CONOSCENZA DEI VETTORI $\underline{w}_1 = f(\underline{v}_1), \dots, \underline{w}_n = f(\underline{v}_n)$

esercizio. Dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ lin. indipendenti, trovare condizione nec. e suff. affinché $f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)$ siano lin. indipendenti (cioè: sotto quale condizione gli $f(\underline{v}_j)$ sono lin. indip.?)

In altri termini: f è completamente determinata dai $\underline{w}_1 = f(\underline{v}_1), \dots, \underline{w}_n = f(\underline{v}_n)$
o anche, dato un qualunque $\underline{v} \in V$, le sue immagine $f(\underline{v})$ è determinata dai $\underline{w}_1 = f(\underline{v}_1), \dots$

---

dim $\exists$ unica comb. lineare dei $\underline{v}_j$ che dà $\underline{v}$:

$\exists$ unici $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c. $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$

Quindi $f(\underline{v}) = f(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) =$

$= \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_n f(\underline{v}_n) =$

$= \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n$

Teorema

Viceversa, siano V, W sp. vett. $/\mathbb{K}$.

Sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = \mathcal{B}$ base di V.

(ordinata)

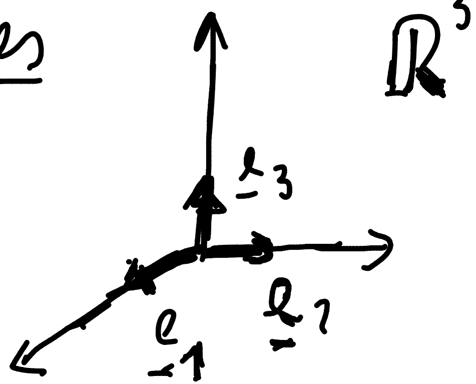
Assegnata arbitrariamente $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in W$ una lista ordinata di vettori in W (possono esserci ripetizioni), $\exists$ unica appl. lineare

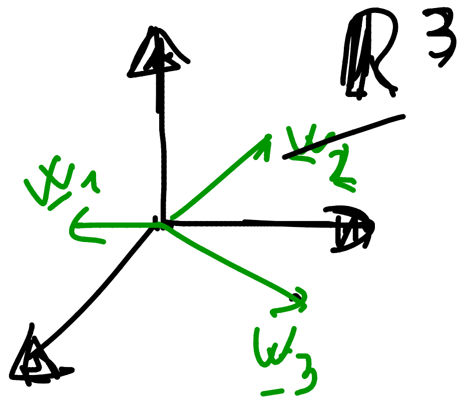
$$f : V \longrightarrow W$$

tale che $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i \quad , i = 1, \dots, n.$

---

es





dim Devo definire una $f: V \to W$ lineare t.c. $f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$, $i=1, \cdots, n$.

Sia $\underline{v} \in V$. Posso scrivere in forma unica

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n .$$

Definisco $f(\underline{v})$ come

$$\alpha_1 \underline{w}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{w}_n$$

Devo dim che f è lineare.

Se $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n$, $\underline{v}' = \alpha_1' \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n' \underline{v}_n$

allora $\underline{v} + \underline{v}' = (\alpha_1 + \alpha_1') \underline{v}_1 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_n') \underline{v}_n$

quindi $f(\underline{v} + \underline{v}') = (\alpha_1 + \alpha_1') \underline{w}_1 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_n') \underline{w}_n =$

$$= (\alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n) + (\alpha'_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha'_n \underline{w}_n) = f(\underline{v}) + f(\underline{v}').$$

Se $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \underline{v} = \alpha \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha \alpha_n \underline{v}_n$, quindi

$$f(\alpha \underline{v}) = \alpha \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha \alpha_n \underline{w}_n = \alpha (\alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n) = \alpha f(\underline{v}).$$

Complementi:

Equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi di $\mathbb{K}^n$.

Convenzione: data $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, denotiamo con $\operatorname{Ker} A$ il nucleo dell'appl. lineare $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m : \underline{x} \longmapsto A\underline{x}$.

Analogamente, $\operatorname{Im} A$ sarà l'immagine di tale applicazione.

Quindi, $\operatorname{Ker} A$ sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$, mentre $\operatorname{Im} A$ è anche lo spazio delle colonne di A (che abbiamo indicato con $\mathcal{C}(A)$).

Def. Sia $U \subset \mathbb{K}^n$ sottospazio vettoriale di <u>dim d</u>.

- Si dice che U è dato in FORMA CARTESIANA se $\boxed{U = \operatorname{Ker} A}$ per una certa matrice A di tipo $(n-d) \times n$, di rango $n-d$.

Quindi U è presentato come luogo di zeri di $n-d$ equazioni lineari indipendenti (si ricordi: $\dim \operatorname{Ker} A = n - \operatorname{rg} A = n-(n-d) = d$).

- Si dice che U è dato in FORMA PARAMETRICA se $\boxed{U = \operatorname{Im} A}$ per una matrice A di tipo $n \times d$, di rango d. Quindi le colonne di A sono una base di U (e i "parametri" sono i coefficienti delle combinazioni lineari delle colonne, al variare dei quali si trovano tutti i vettori di U).

I) Passaggio dalla forma cartesiana alla forma parametrica.

Sia $U = \operatorname{Ker} A$; si trovi una base di $\operatorname{Ker} A$, ad esempio riducendo A a scala e applicando il metodo visto. Si trovano certi vettori $B^1, \dots, B^d$ t.c. $U = \operatorname{Span}\{B^1, \dots, B^d\}$.

Allora $U = \operatorname{Im} B$, con $B = [B^1 \vdots \cdots \vdots B^d]$, dove B è la matrice che ha come colonne le B^i.

In pratica, i parametri sono le variabili libere.

Per fissare le idee, supponiamo che gli $n-d$ pivot stiano nelle prime $n-d$ colonne della ridotta S.

Supponiamo anche che S sia a scala ridotta (cioè con pivot 1 e zeri sopra e sotto i pivot).

Tenendo conto che A è $(n-d)\times n$ e $rg A = n-d$, la S sarà:

$$S = \left[I_{n-d} \vdots S_2 \right]$$, con I_{n-d} identità di ordine $n-d$

e S_2 di tipo $(n-d)\times d$.

Scomponiamo il vettore delle coordinate $\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix}$ $\underline{x}_1 \in \mathbb{K}^{n-d}$, $\underline{x}_2 \in \mathbb{K}^d$.

variabili libere

Allora $S\underline{x} = 0 \iff \underline{x}_1 = -S_2 \underline{x}_2$

La matrice B sopra scritta si scrive in questo caso:

$$B = \begin{bmatrix} -S_2 \\ I_d \end{bmatrix}$$ dove I_d è l'identità di ordine d.

<u>Esempio 1</u>. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ definito da

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

quindi $$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = -\frac{5}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \end{cases}$$ è un modo per descrivere U coi parametri x_3, x_4.

Anche:

$$U = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

II) Passaggio dalla forma parametrica alla forma cartesiana.

Sia $U = \operatorname{Im} A$, con $A = [A^1 \vdots \cdots \vdots A^d]$.

1° metodo. Si deve trovare una $B_{(n-d)\times n}$, $\operatorname{rg} B = n-d$, t.c. $B A^1 = \underline{0}, \dots, B A^d = \underline{0}$ (perché le A^j generano U) e quindi $BA = 0$; equivalentemente ${}^tA\,{}^tB = 0$. Cioè le righe di B sono base per $\operatorname{Ker} {}^tA$. Si può trovare B riducendo ${}^tA$ a scala e trovando base di $\operatorname{Ker} {}^tA$ come sopra.

2° metodo. Il vettore $\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \in U \iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} [A \vdots \underline{\xi}]$.

Si riduce $[A \vdots \underline{\xi}]$ a scala:

$[A \vdots \underline{\xi}] \sim [S \vdots \underline{\xi}']$, dove S risulterà la riduzione di A e quindi avrà $d = \text{rg}A$ righe non nulle.

Allora le equazioni cartesiane di U sono date uguagliando a 0 le ultime $n-d$ componenti dell'ultima colonna $\underline{\xi}'$.

Esempio 2. Sia

$$U = \text{Im}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(equivalentemente, U è lo Span in $\mathbb{R}^4$ delle colonne della data matrice A)

1° metodo.

$$ {}^tA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \sim $$

$$ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

quindi:

$$ U = \operatorname{Ker} B = \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -\frac{7}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + x_4 = 0 \end{cases} $$

2° metodo. Scriviamo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & x_1 \\ -1 & 2 & x_2 \\ 0 & 3 & x_3 \\ 3 & 1 & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & x_1/2 \\ 0 & 3/2 & x_1/2 + x_2 \\ 0 & 3 & x_3 \\ 0 & 5/2 & x_4 - \frac{3}{2}x_1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & x_1/2 \\ 0 & 1 & \frac{x_1}{3} + \frac{2}{3}x_2 \\ \hline 0 & 0 & x_3 - x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & x_4 - \frac{7}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 \end{array}\right]$$

quindi U è dato da:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -\frac{7}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$