Lezione del 5/12/2013

Siamo $f: V \to W$, $g: W \to Z$ appl. lineari.

Abbiamo visto (eser. 5 alla fine della lez. del 14/11) che

$$\underset{\substack{\| \\ rg(g\circ f)}}{\dim \operatorname{Im}(g\circ f)} = \underset{\substack{\| \\ rg(f)}}{\dim \operatorname{Im} f} - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Ne segue:

<u>Proposizione</u> (1) Se g è iniettiva $\Rightarrow rg(g\circ f) = rg(f)$

(2) Se f è surgettiva $\Rightarrow rg(g\circ f) = rg(g)$

---

(1) segue subito dalla formula perché $\operatorname{Ker} g = \{\underline{0}\}$.

(2) deriva da: $\operatorname{Im} f = W$, quindi $\operatorname{Im}(g\circ f) = \operatorname{Im} g$

In particolare, comporre un'applicazione con degli isomorfismi (a destra o a sinistra) non ne cambia il rango.

<u>Corollario</u> Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è SD-equivalente a B, allora: $rg(A) = rg\, B$.

<u>dim</u>. $\exists\, P, Q$ invertibili t.c. $B = PAQ$. Possiamo vedere A, B, P, Q come le matrici associate, rispetto alle basi canoniche, a $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $f': \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $h: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $g: \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ rispettivamente, per cui $f' = g \circ f \circ h$. Siccome P e Q sono invertibili, g e h sono isomorfismi e quindi $\underset{\substack{\shortparallel \\ rg(A)}}{rg(f)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ rg(B)}}{rg(f')}$

Quindi il rango è un <u>invariante</u> per la relazione di SD-equivalenza.

Invariante: "oggetto matematico" (es: numero) che non cambia per elementi equivalenti.

In generale possono esistere più invarianti.

<u>def</u>. Un <u>insieme completo</u> di invarianti è un insieme di invarianti che caratterizza ogni classe di equivalenza, cioè A, B sono equivalenti $\Longleftrightarrow$ possiedono la stessa lista di invarianti.

Nel caso in questione, ci chiediamo se, per la relazione di SD-equivalenza in $M_{m,n}(\mathbb{K})$, il rango è invariante completo.

Teorema Sia $f: V \to W$ appl. lineare di sp. vett. su $\mathbb{K}$, di dim n, m rispettivamente. Se $rg(f) = r$, allora $\exists$ basi $\mathcal{B}'$ di V e $\mathcal{C}'$ di W tali che

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

---

dim. Basta partire da una base $\underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n$ di $\ker f$, estenderla a una $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_r, \underline{v}_{r+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ di V; esattamente come nella formula delle dimensioni si dimostra che i $f(\underline{v}_j) = \underline{w}_j$, $j = 1, \dots, r$ sono base di $\mathrm{Im}\, f$; estendiamo a base $\mathcal{C}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m\}$ di W. Allora nelle basi $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ la matrice è quella scritta $\square$

<u>Teorema</u> Vale: se $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\exists\, P, Q$ invertibili t.c. $B = PAQ \iff rg(A) = rg(B)$

<u>dim</u> $\Rightarrow$ visto prima. $\Leftarrow$. Basta dim. che ogni matrice di rango r in $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è SD-equivalente a $\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. Il risultato seguirà infatti dalla proprietà transitiva.

Sia $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ con matrice A rispetto alle basi canoniche $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ di $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ risp.: $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$.

Per il teo precedente $\exists$ basi $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ di $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ risp. tali che

$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$, $r = rg A$. Per il teo. di cambiamento di

base

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = P\,A\,Q \quad , \text{ dove } \quad P = M^{e}_{e'}(id_{\mathbb{K}^m}), \quad Q = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{K}^n}) .$$

Problema: - considerare la S-equivalenza: $A \sim B \iff \exists P$ invertibile t.c.

$$B = PA$$

- la D-equivalenza: $A \sim B \iff \exists\ Q$ invertibile t.c.

$$B = AQ$$

dim. che: (i) sono entrambi relazioni di equivalenza.

(ii) A S-equiv. a $B \Rightarrow A$ SD-equiv. a B

(iii) A D-equiv. a $B \Rightarrow$ "

Mostrare (con esempi) che il viceversa non è vero

- cercare di trovare "forma canonica" per la S-equiv. (e per la D-equiv)

<u>es</u>. dimostrare che $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix}$ sono S-equiv. $\Leftrightarrow$ $a = c$, $b = d$.

$P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ $\quad PA = B \Rightarrow P = I$

quindi: all'interno della classe di SD-equiv. che conterrebbe sia A che B, ci sono infinite classi di S-equivalenza.

<u>Problema</u>: quali sono gli invarianti rispetto alla relazione di similitudine per le matrici quadrate?

Consideriamo ora le matrici quadrate $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Costruiremo un invariante per similitudine.

In particolare, cerchiamo una $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c.

$\varphi(A) = \varphi(P^{-1}AP)$ se P è una qualunque matrice invertibile.

Costruiamo φ riguardando alla matrice A come alla collezione delle sue righe:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \varphi(A) = \varphi \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Possiamo anche scrivere:

$$\varphi(A_1, A_2, \cdots, A_n)$$

Cerchiamo una φ che sia MULTILINEARE e ALTERNANTE come funzione delle righe di A, cioè soddisfi gli assiomi seguenti:

1) [MULTILINEARITÀ] φ è lineare in ciascuna componente, cioè:

$$\varphi(A_1, \cdots, A_{j-1}, \lambda A_j + \mu A_j', A_{j+1}, \cdots, A_n) =$$

$$\lambda \varphi(A_1, \cdots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \cdots, A_n) + \mu \varphi(A_1, \cdots, A_{j-1}, A_j', A_{j+1}, \cdots, A_n)$$

2) [ALTERNANZA] Scambiando fra loro due righe qualunque di A, φ cambia segno:

$$\varphi(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -\varphi(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots)$$

3) [NORMALIZZAZIONE] $\varphi(I) = \varphi(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n) = 1$

TEOREMA Esiste una e una sola funzione che soddisfa gli assiomi 1), 2), 3) [verrà chiamata DETERMINANTE, e denotata con det]

<u>oss</u> Si possono definire in generale le funzioni multilineari

$$f: V_1 \times \cdots \times V_k \longrightarrow W.$$

dove i V_i possono essere distinti. Si denotano con

$$\mathrm{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_k ; W)$$

Se i V_i sono tutti uguali a un certo V, e $W = \mathbb{K}$, si possono considerare le funzioni multilineari alternanti

$$f : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

(che verificano anche 2)).

Nel caso delle matrici stiamo considerando $V = \mathbb{K}^n$.

Proprietà che si deducono dagli assiomi 1), 2), 3).

(i) Se A ha due righe uguali, allora $\varphi(A) = 0$

dim. Scambiando le righe, A rimane uguale ma cambia segno, quindi $\varphi(A) = -\varphi(A) \Rightarrow \varphi(A) = 0$.

(ii) Se A ha una riga nulla, allora $\varphi(A) = 0$.

dim Supp. $A_1 = 0$ (se è un'altra riga la dim. è analoga).

Allora $\varphi(\underline{0}, A_2, \dots, A_n) = \varphi(\underline{0} + \underline{0}, A_2, \dots, A_n) = \varphi(\underline{0}, A_2, \dots, A_n) + \varphi(\underline{0}, A_2, \dots, A_n)$

Quindi $\varphi(A) = 0$.

(iii) Se alla riga A_i si somma un multiplo della riga A_j $(j \neq i)$ si ottiene una matrice B t.c. $\varphi(B) = \varphi(A)$.

<u>dim</u> (supp. $i=1, j=2$, in generale è lo stesso). $\varphi(A_1 + \lambda A_2, A_2, \cdots, A_n) =$

$$\varphi(A_1, A_2, \cdots, A_n) + \lambda \varphi(\underbrace{A_2, A_1}, \cdots, A_n) = \varphi(A).$$

(iv) Se S è una forma a scala di A (ottenuta con la riduzione di Gauss) allora $\varphi(A) = \pm \varphi(S)$. Il segno è $+$ se nella riduzione si è fatto un numero pari di scambi di righe, è $-$ se tale numero è dispari.

dim. Deriva subito dal punto precedente e dall'assioma 2).

(v) Se A è diagonale, allora $\varphi(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.

dim $\varphi(A) = \varphi(a_{11}\underline{e}_1, a_{22}\underline{e}_2, \dots, a_{nn}\underline{e}_n) = a_{11}\varphi(\underline{e}_1, a_{22}\underline{e}_2, \dots, a_{nn}\underline{e}_n) =$

$a_{11}a_{22}\varphi(\underline{e}_1, \underline{e}_2, a_{33}\underline{e}_3, \dots, a_{nn}\underline{e}_n) = \dots = a_{11}\cdots a_{nn}\varphi(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = a_{11}\cdots a_{nn}$

per l'assioma 3).

---

def. Una matrice quadrata A si dirà non-singolare se è invertibile, cioè $\exists\, B$ t.c. $AB = BA = I$ $(B = A^{-1})$.

A si dirà singolare se non è invertibile.

Per quanto visto le volte scorse, si ha:

$\boxed{\text{$A$ è non singolare $\iff$ rg $A = n \iff$ la sua riduzione a scala ha n pivot $\neq 0$ ($\iff$ ha n righe $\neq \underline{0}$).}}$

(vi) Se A è singolare $\Rightarrow \varphi(A) = 0$.

<u>dim</u>. Una riduz. a scala S di A ha almeno una riga nulla, e quindi per (iv) e (ii) $\varphi(A) = \varphi(S) = 0$

(vii) Si ha al più <u>una</u> funzione φ che soddisfa gli assiomi 1), 2), 3).

<u>dim</u>. Sia A non-singolare. $A \sim S = \begin{bmatrix} p_1 & & * \\ & p_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & p_n \end{bmatrix}$

con $p_1, \dots, p_n \neq 0$. Supponiamo di aver fatto m scambi di riga. Allora $\varphi(A) = (-1)^m \varphi(S)$

Con ulteriori operazioni riga (senza bisogno di scambi) possiamo ridurre ulteriormente a matrice diagonale:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{bmatrix}\right) = \varphi(S)$$

$$= (-1)^m \varphi(A) \qquad \| \qquad p_1 p_2 \cdots p_n$$

Conclusione: se y esiste è unica

GRUPPO SIMMETRICO

$$S = \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$\Sigma(S) = \{\sigma : S \to S \mid \sigma \text{ bigettive}\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & --- & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

operazione: composizione:

σ, τ $\quad \sigma \circ \tau$ è anc. biettiva

el. neutro $\quad id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} = \tau$

$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix}$

$\Sigma_n \qquad \sigma_n$

Z_5 $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Σ_n è non commutativo $(n \geq 3)$

$$\# \Sigma_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 .$$

1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, ...

TRASPOSIZIONI $\underline{\text{DEF}}$ $(i\ j)$ è la permutazione che scambia i con j e fissa tutto il resto.

L'inversa di $\tau = (i\ j)$ è τ stessa

$\tau^2 = id$

oss. $\tau = (i\ j)$ $\quad \lambda = (h\ k)$

se $\{i, j\} \cap \{h, k\} = \emptyset$

allora $\tau\lambda = \lambda\tau$ [commutano]

$(1\ 2), (2\ 3)$ non commutano

Prop

1) Ogni permutazione è prodotto di trasposizioni [non in modo unico]

2) Se $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k = \lambda_1 \cdots \lambda_h$ con τ_i e λ_j trasposizioni. Allora k e h sono entrambi pari oppure entrambi dispari.

Per 2), chiamerò PARI una permutazione che si esprime come

prodotto di un numero pari di trasposizioni,
altrimenti le chiamo DISPARI.