Lezione del 5/11/13

Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia S una riduzione a scala di A, avente k pivot $p_1, \dots, p_k$. Indichiamo con $j'_1, \dots, j'_k$ gli indici (in ordine crescente) delle colonne contenenti i pivot, e con $j''_1, \dots, j''_{n-k}$ quelli delle colonne libere.

Nell'esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$j'_1 = 1$, $j'_2 = 3$, $j'_3 = 4$

$j''_1 = 2$, $j''_2 = 5$, $j''_3 = 6$

Ricordiamo: $rg(A) = \dim \mathcal{C}(A)$ $[\mathcal{C}(A) = \mathrm{Span}(\text{colonne})]$

Prop 1. Le colonne $A^{j_1'}, \dots, A^{j_k'}$ contenenti i pivot sono linearmente indipendenti e $\mathcal{C}(A) = \mathrm{Span}(\{A^{j_1'}, \dots, A^{j_k'}\})$.

---

dim. Si è visto che assegnando $x_{j_1''}, \dots, x_{j_{n-k}''}$ arbitrariamente, si ricavano unici $x_{j_1'}, \dots, x_{j_k'}$ in modo che il vettore $\underline{x}$ che ha tali coordinate risolva $A\underline{x} = \sum_{h=1}^{k} x_{j_h'} A^{j_h'} + \sum_{\ell=1}^{n-k} x_{j_\ell''} A^{j_\ell''} = \underline{0}$

Dando a tutti gli $x_{j''}$ il valore 0, si ricava quindi che l'unica soluzione per gli $x_{j'}$ è quella nulla, per cui le colonne $A^{j'}$ sono lin. indip.

Dando a $x_{j''_\ell}$ il valore -1 e a tutti gli altri $x_{j''}$ il valore 0, si ricavano $x_{j'_1}, \dots, x_{j'_k}$ tali che $\sum_{h=1}^{k} x_{j'_h} A^{j'_h} = A_{j''_\ell}$,

cioè $A_{j''_\ell} \in \mathrm{Span}\{A_{j'_1}, \dots, A_{j'_k}\}$, $\ell = 1, \dots, n-k$, che dimostra la tesi.

Prop. 2. Le k righe non nulle di S sono linearmente indipendenti e costituiscono una base di $\mathcal{R}(A)$.
[$\mathcal{R}(A)$ = spazio gen. dalle righe di A]

---

dim. Consideriamo una combinazione nulla delle righe:

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \, S_i = \underline{0}.$$

In posizione j_1' solo S_1 ha componente non nulla ($= p_1$), da cui segue $y_1 = 0$. Guardando poi alla componente j_2', in cui S_2 ha componente p_2 mentre $S_3, \dots, S_k$ hanno 0, segue $y_2 = 0$.

Così proseguendo si deduce successivamente $y_3 = \cdots = y_k = 0$, che dà l'indip. lineare delle righe di S.

Ovviamente tali righe sono una base per $\mathcal{R}(S)$.

Poiché inoltre le operazioni elementari lasciano invariato lo spazio generato dalle righe (esercizio!), segue che $S_1, \dots, S_k$ sono base di $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(A)$.

[si può usare l'algoritmo di scambio]

Teorema.

$$\mathrm{rg}(A) = \underline{\#\,\text{pivots}} = \underline{\#\,\text{righe} \neq 0 \text{ di } S} = \dim \mathcal{R}(A)$$

dim. Dalla prop. 1 precedente segue che le k colonne contenenti i pivot sono una base di $\mathcal{C}(A)$, da cui $\mathrm{rg}(A) = \#$ pivots.

Ovviamente $\#$ pivots $= \#$ righe non nulle di S.

Dalla prop. 2 segue $\#$ righe non nulle di $S = \dim \mathcal{R}(A)$, che conclude

Siccome le righe e le colonne di A e di ${}^tA$ si scambiano, si ha:

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{C}({}^tA), \quad \mathcal{C}(A) = \mathcal{R}({}^tA)$$

Segue:

<u>Corollario</u> $\quad \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$

COROLLARIO. Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Si ha:

$$\boxed{\dim \{ \underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{x} = \underline{0} \} = n - \operatorname{rg}(A)}$$

CASO NON OMOGENEO.

Consideriamo il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$,

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\underline{b} \in \mathbb{K}^m$, $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$.

Sia $\mathcal{S} = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{x} = \underline{b}\}$ insieme delle soluzioni.

Sia $\mathcal{S}_0 = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$ insieme delle soluzioni del <u>sistema omogeneo associato</u>.

<u>OSS</u>. 1) [già visto] $\mathcal{S}_0$ è sottosp. vett. di $\mathbb{K}^n$, $\dim(\mathcal{S}_0) = n - \operatorname{rg} A$.

2) $\mathcal{S}$ è sottosp. vett. $\iff \underline{b} = \underline{0}$.

3) [già visto] [teo. Rouché-Capelli] $\mathcal{S} \neq \emptyset \iff \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A}$

con $\tilde{A} = [A \vdots \underline{b}]$.

4) Se $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2 \in \mathcal{S}$, allora $\underline{x}_2 - \underline{x}_1 \in \mathcal{S}_0$.

Infatti: $\begin{cases} A\underline{x}_1 = \underline{b}, \\ A\underline{x}_2 = \underline{b} \end{cases} \Rightarrow A(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) = \underline{0}$

5) Se $\underline{x}_1 \in \mathcal{S}$, $\underline{x} \in \mathcal{S}_0$, allora $\underline{x}_1 + \underline{x} \in \mathcal{S}$.

Infatti da $\begin{cases} A\underline{x}_1 = \underline{b}, \\ A\underline{x} = \underline{0} \end{cases}$ segue $A(\underline{x}_1 + \underline{x}) = \underline{b}$

Per vedere se $A\underline{x}=\underline{b}$ è risolubile bisogna vedere se $\text{rg}\, A = \text{rg}\, \tilde{A}$, con $\tilde{A}=[A \vdots \underline{b}]$. Algoritmo: si riduca a scala $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} \sim \tilde{S} = [S \vdots \underline{c}]$$

dove S è la riduzione di A e $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$ è l'ultima colonna.

Se S ha k righe non nulle e se $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ allora $\text{rg}\, A = \text{rg}\, \tilde{A}$; se invece $c_{k+1} \neq 0$ allora si ha

$\text{rg}\, A < \text{rg}\, \tilde{A}$.

Teorema. Supponiamo che $A\underline{x}=\underline{b}$ sia risolubile ($\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\tilde{A}$). Se $\underline{x}_1 \in \mathcal{S}$ è una qualunque soluzione particolare del sistema, allora si ha

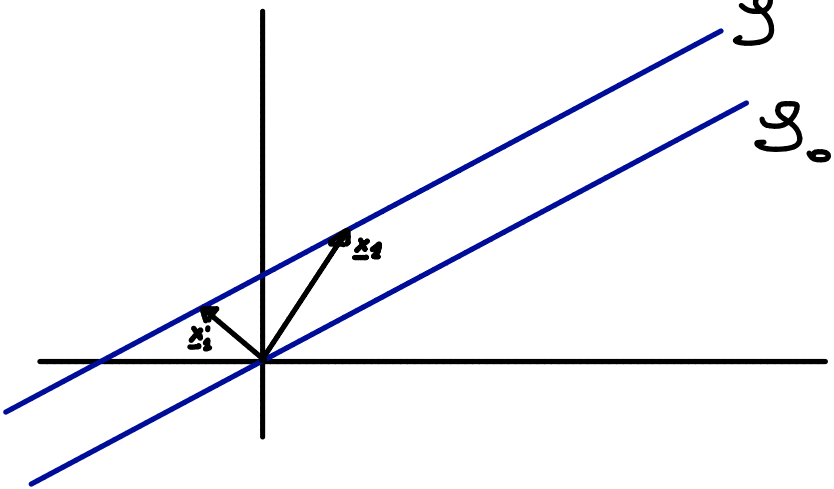
$$\boxed{\mathcal{S} = \underline{x}_1 + \mathcal{S}_0} \quad \left(= \{\underline{x}_1 + \underline{x} \mid \underline{x} \in \mathcal{S}_0\}\right)$$

Quindi l'insieme delle soluzioni (quando non è vuoto) si ottiene traslando un sottospazio vettoriale di dim $n - \operatorname{rg} A$.
[un "traslato" di un sottospazio vettoriale si chiama anche sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$].

---

dim teorema. Se $\mathcal{S} \neq \emptyset$, sia $\underline{x}_1 \in \mathcal{S}$. $\forall\, \underline{x}_2 \in \mathcal{S}$, si può scrivere $\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + (\underline{x}_2 - \underline{x}_1)$, e $\underline{x}_2 - \underline{x}_1 \in \mathcal{S}_0$ per il punto 4) dell'osservazione precedente.

<u>OSS</u>. Si ottiene lo stesso $\mathcal{S}$ traslando $\mathcal{S}_0$ per un qualunque $\underline{x}_1 \in \mathcal{S}$; si può quindi costruire $\mathcal{S}$ partendo da una soluzione particolare qualunque (invece $\mathcal{S}_0$ è unico).



Abbiamo visto

$$\boxed{\begin{aligned} A(\underline{x}+\underline{y}) &= A\underline{x}+A\underline{y} \\ A(\alpha\underline{x}) &= \alpha A\underline{x} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &, \forall\, \underline{x},\underline{y}\in\mathbb{K}^n \\ &, \forall\, \underline{x}\in\mathbb{K}^n, \forall\alpha\in\mathbb{K} \end{aligned}$$

in generale:

$$A(\alpha_1\underline{x}_1+\alpha_2\underline{x}_2+\dots+\alpha_K\underline{x}_K) = \alpha_1 A\underline{x}_1+\alpha_2 A\underline{x}_2+\dots+\alpha_K A\underline{x}_K$$

cioè la trasformazione $f_A : \underline{x} \longrightarrow A\underline{x} \ : \ \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

"conserva le combinazioni lineari"

$$f_A(\alpha_1\underline{x}_1+\dots+\alpha_n\underline{x}_n) = \alpha_1 f_A(\underline{x}_1)+\dots+\alpha_n f_A(\underline{x}_n)$$

es. (i) $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot x_1 - \operatorname{sen}\theta \cdot x_2 \\ \operatorname{sen}\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

rotazione di angolo θ in senso antiorario.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

simmetria rispetto alla bisettrice $x_1 = x_2$.

(iii) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$ $\quad$ riflessione rispetto al piano xy

(iv)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

simmetria rispetto all' asse z

(v)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot x_1 - \text{sen}\,\theta \cdot x_2 \\ \text{sen}\,\theta \cdot x_1 + \cos\theta \cdot x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

rotazione di angolo θ attorno all' asse z.

DEF Siano V e W sp. vett. su $\mathbb{K}$. Una trasformazione $f: V \longrightarrow W$ si dice **applicazione lineare** se

$$f(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) \qquad , \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$$

$$f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v}) \qquad , \forall \underline{v} \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

---

oss. $f: V \to W$ è lineare $\Longleftrightarrow$

$$f(\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) = \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \dots + \alpha_n f(\underline{v}_n)$$

$\forall \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (cioè f manda comb. lin. in comb. lin.).

es 1) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ data da

$$f(\underline{x}) = A\,\underline{x}$$

2) $V = \mathbb{R}[x] = W$, $f : V \to W$ data da

(i) $f(p(x)) = (x^2-1)\,p(x)$ $[\,p(x) \to q(x)\,p(x)$

$f(p_1+p_2) = f(p_1) + f(p_2)$ $q(x)(p_1(x)+p_2(x)) = q(x)\,p_1(x) + q(x)\,p_2(x)$

(ii) $f(p(x)) = p(2)$ $[\,\cdot$

$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ é lineare

(iii) $f(p(x)) = p(2x+3)$

$p(x)+q(x) \longrightarrow p(2x+3) + q(2x+3) = f(p) + f(q)$

(iv) $f(p(x)) = p^2\cancel{(x)}$ NO

$f(\alpha\,p(x)) = \alpha\,p(2x+3) = \alpha\,f(p)$ $(p+q)^2 \neq p^2 + q^2$

v) $f(p(x)) = \frac{d}{dx} p(x)$

3) $V = W = \mathbb{C}$ come sp. vett. su $\mathbb{C}$. $f: V \to W$

rotazione di angolo θ

data da (i) $f(z) = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\, z$

(ii) $f(z) = \bar{z}$ ← non è $\mathbb{C}$-lineare

è $\mathbb{R}$-lineare

$V = W = \mathbb{C}$ come sp. vett. su $\mathbb{R}$.

$f(z) = \bar{z}$

$f(\alpha z) = \bar{\alpha} f(z)$ NON È LINEARE

$\overline{\alpha z} = \bar{\alpha}\, \bar{z}$

$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

$f: K \to K$ $x \to ax$ $a \in K$

è lineare

$V = \mathbb{C}$ come sp. vett. su $\mathbb{R}$

$f(z) = \bar{z}$

è lineare

$f(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \bar{\alpha}\,\bar{z} = \alpha \bar{z}$

$= \alpha f(z)$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

base 1

base $1, i$

Alcune proprietà principali.

Sia $f : V \longrightarrow W$ appl. lineare.

1) $\mathrm{Im}\, f = f(V) = \{ \underline{w} \in W \mid \exists\, \underline{v} \in V \text{ t.c. } f(\underline{v}) = \underline{w} \}$

$$= \{ f(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V \}$$

è sottosp. vett. di W.

Più in generale se U è sottosp. vett. di V

allora $f(U) = \{ \underline{w} \in W \mid \exists\, \underline{u} \in U \text{ t.c. } f(\underline{u}) = \underline{w} \}$

è sottosp. vett. di W.

Esercizio $\quad \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in f(U) \overset{?}{\Longrightarrow} \underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in f(U$

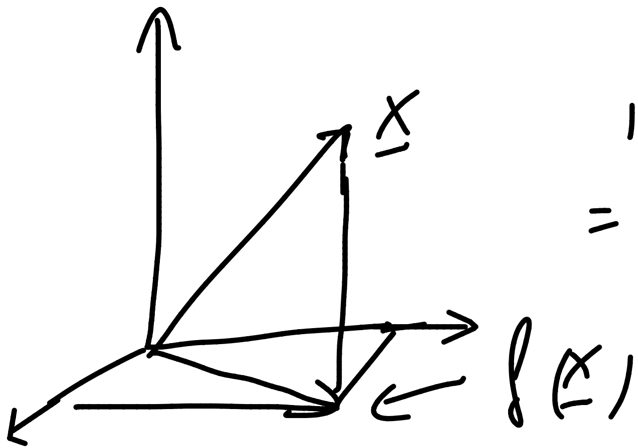
sì: $\quad \underline{w}_1 = f(\underline{u}_1) \quad \underline{w}_2 = f(\underline{u}_2) \Longrightarrow \underline{w}_1 + \underline{w}_2 = f(\underline{u}_1 + \underline{u}_2)$

es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f : \underline{x} \longrightarrow A\underline{x}$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

proiezione sul piano x, y.



$\ker f = \text{Span}(\underline{e}_3)$

Esercizio

f lineare

$\Downarrow$

$f(\underline{0}) = \underline{0}$

2) NUCLEO DI $f: V \to W$

$\mathrm{Ker}(f)$ Kernel(f)

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{0} \}$$

ker(f) è sottosp. vett. di U

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow f(\underline{v}_1) = \underline{0}$, $f(\underline{v}_2) = \underline{0}$

$$f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$

2ª condiz: esercizio

3) Se $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) \Longrightarrow \underline{v}_2 - \underline{v}_1 \in \operatorname{Ker} f$

infatti:

$$f(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) = f(\underline{v}_2) - f(\underline{v}_1) = \underline{0}$$

Per $\underline{w} \in W$, si def. $f^{-1}(\underline{w}) = \{ \underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{w} \}$

Sia $\underline{v}_1$ t.c. $f(\underline{v}_1) = \underline{w}$

$\forall \underline{v}_2$ t.c. $f(\underline{v}_2) = \underline{w}$

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_1 + \underbrace{(\underline{v}_2 - \underline{v}_1)}_{\in \operatorname{Ker} f}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

$$\underline{x} \to A\underline{x}$$

$$\underline{b} \in \mathbb{K}^m$$

$f^{-1}(\underline{b})$ = soluzioni del sistema

$$\|$$

sia $\underline{v}$: $f(\underline{v}) = \underline{b}$ $\qquad A\underline{v} = \underline{b}$

$$f^{-1}(\underline{b}) = (\ker f) + \underline{v}$$

$\ker f = \{ \underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0} \}$

<u>Teorema</u> $f : V \to W$ lineare.

Allora:

$$\boxed{\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim V}$$

<u>dim</u> Prendo base $\ker f$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ posso estenderle a base di tutto V

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h, \underline{v}_{h+1}, \dots, \underline{v}_n$

- - - - - - - - - -