Lezione 3/10/13

si è visto che ci sono tanti <u>campi</u> di numeri:

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$uaternioni (non commutativo)

campi finiti: $\{0,1\}$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\{0,1,2\}$

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

ecc...

$$\mathbb{C} \equiv \{ x+iy \mid x,y \in \mathbb{R},\quad i^2 = -1 \}$$

$$(x+iy)+(x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$$

$$(x+iy)(x'+iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

$$\text{Quaternioni} \equiv \left\{ x+iy+jz+kt \;\middle|\; \begin{array}{l} x,y,z,t \in \mathbb{R} \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ijk = -1 \end{array} \right\}$$

$$\{a+ib \;,\; a,b\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{C}$$

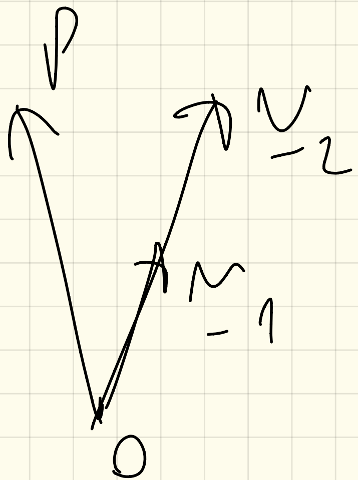
$$\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{R}$$

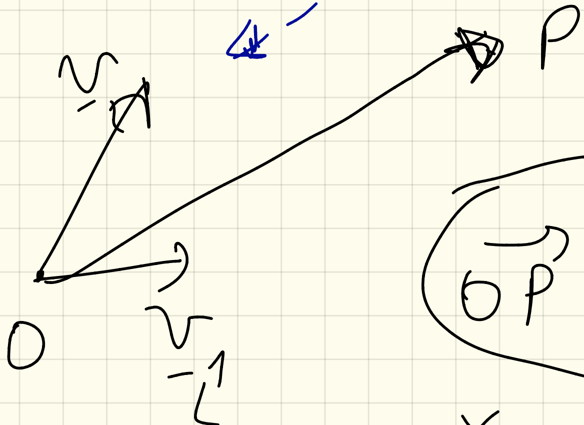
$$\mathbb{K}=\mathbb{R},\ \mathbb{C}$$

V vettori geometrici

$\underline{v}$

$\underline{v}_1, \underline{v}_2$ non allineati



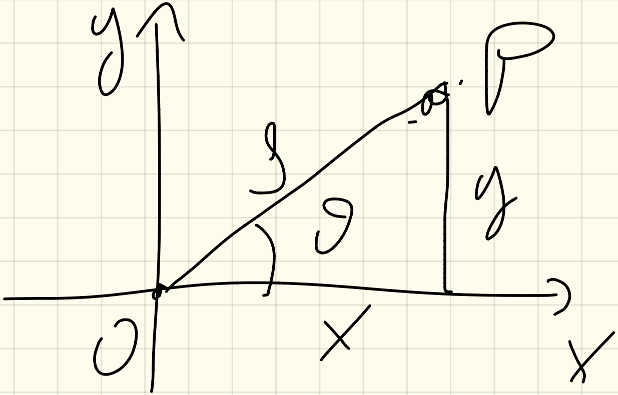


$$\overrightarrow{OP} = x\,\underline{v}_1 + y\,\underline{v}_2$$

$x, y \in \mathbb{R}$

$\boxed{(x, y) \text{ coordinate "lineari"}}$

altri tipi di coordinate: coordinate polari



$$(\rho, \theta)$$

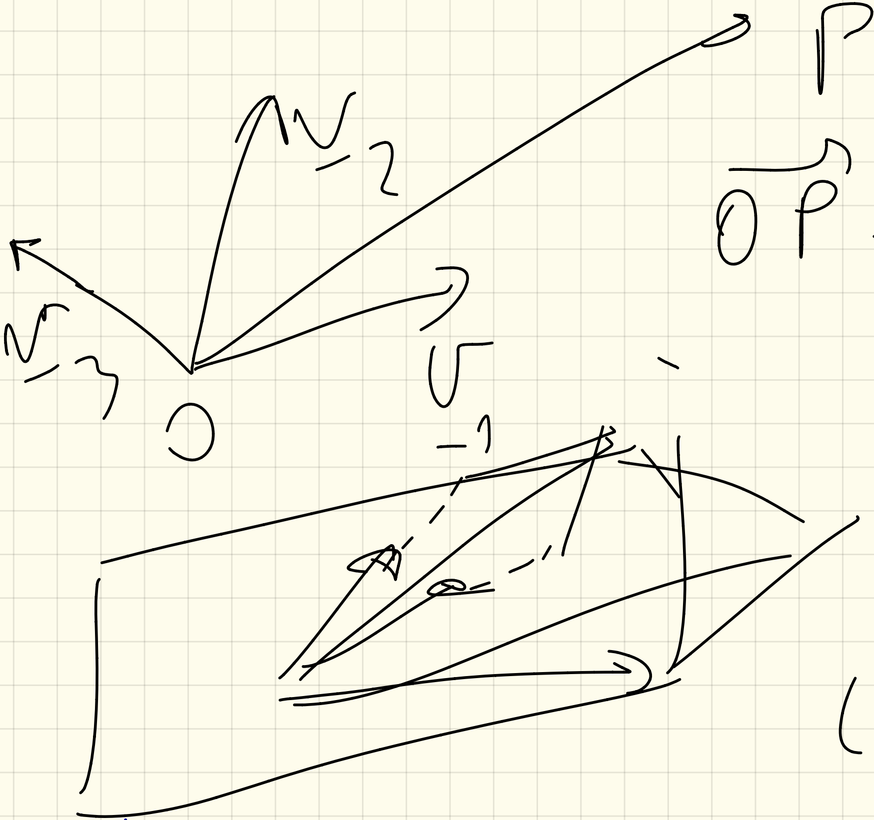
$$\rho \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$



$$\vec{OP} = \underbrace{x\,\underline{v}_1 + y\,\underline{v}_2 + z\,\underline{v}_3}_{\text{combinazione lineare}}$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

__riferimento__: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ NON COMPLANARI – __coordinate__ del vettore $\vec{OP}$: coefficienti dello __sviluppo__ di $\vec{OP}$ tramite $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$

IDEA GENERALE:

$$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$ "riferimento"

$$\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n$$

$$\underline{v} \longleftrightarrow (x_1, \dots, x_n) \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

più in generale: $x_i \in \mathbb{K}$

al vettore $\underline{v}$ vogliamo associare uniche coordinate

V insieme nel quale è definita una operazione $+ : V \times V \to V$

$\alpha \, \underline{v}$ $\qquad \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

e in generale su un campo $\mathbb{K}$

$\mathbb{K} \times V \longrightarrow V$

è un "prodotto esterno";

V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$: sono definite somme di vettori, $[\underline{v}+\underline{w} \in V]$ e prodotto esterno $[\alpha \underline{v} \in V,\ \alpha \in \mathbb{K}, \underline{v} \in V]$ che verificano,

1) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w}) \quad \forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$

2) $\exists$ vettore nullo $\underline{0} \in V$ t.c. $\underline{0}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{0} = \underline{v}, \ \forall \underline{v} \in V$

3) $\forall\, \underline{v} \in V, \ \exists\, \underline{w} \in V$ t.c. $\underline{v}+\underline{w} = \underline{w}+\underline{v} = \underline{0}$

4) $\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V \quad \underline{v}+\underline{w} = \underline{w}+\underline{v}$

- 1), 2), 3), 4) $\longleftrightarrow$ $V, +$ è gruppo commutativo.
- $\underline{0}$ è il <u>vettore nullo</u>; $\underline{w}$ in 3) è <u>il vettore opposto di</u> $\underline{v}$

5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall \underline{v} \in V$

$(\alpha+\beta)\underline{v} = \alpha \underline{v} + \beta \underline{v}$; $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta \underline{v})$

6. $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

$\alpha(\underline{v}+\underline{w}) = \alpha \underline{v} + \alpha \underline{w}$

7. $\forall \underline{v} \in V$ si ha $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$

($1 \in \mathbb{K}$ è l'identità moltiplicativa).

es 7. l'elemento neutro è unico

Se $\underline{0}$, $\underline{0}'$ sono el. neutri:

prendo $\underline{v} \in V$ allora anche

$$\begin{cases} \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} \\ \underline{v} + \underline{0}' = \underline{v} \end{cases}$$

dim fatta da studente

$$\Rightarrow \underline{v} + \underline{0} = \underline{v} + \underline{0}' \overset{\text{legge di cancellazione}}{\Longrightarrow} \underline{0} = \underline{0}'$$

$$\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}'$$

anche $\underline{0}'$ è el. neutro

anche $\underline{0}$ è el. neutro

altra dim

Esercizio

$$0 \cdot \underline{v} = \underline{0} \qquad \forall \underline{v} \in V$$

$$\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$$

sugg.

$$0 = 0 + 0$$

$$\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$$

Gli assiomi 1, 2, 3 su un insieme con operazione definiscono un gruppo. Se vale anche 4, il gruppo è commutativo. Quindi V con l'operazione $+$ è un gruppo commutativo.

---

qualche esempio di gruppo:

esempio di gruppo non-commutativo

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad f \begin{cases} 1 \to 3 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$

$G = \{ f : A \to A$ $\quad g \begin{cases} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\quad f$ bigezione $\}$

ha 6 elementi

bigezione $\longleftrightarrow$ iniettiva e surgettiva

$g \circ f : \begin{cases} 1 \longrightarrow 3 \\ 2 \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 2 \end{cases}$

$$A = \{1, \dots, n\}$$

$$G = \{ f : A \to A \mid f \text{ biiettiva} \}$$

(con l'operazione di composizione

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

$$g \circ f$$

$$n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$$ è il numero di elementi del gruppo

G con l'operazione di composizione è un gruppo.

- $(hg)f = h(gf)$

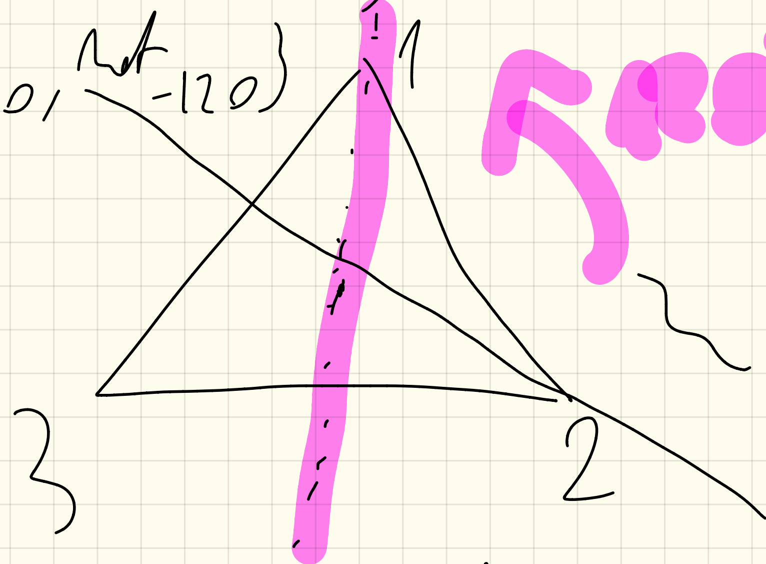
- el. neutro: permutazione identica

$$id \begin{cases} 1 \to 1 \\ 2 \to 2 \\ 3 \to 3 \end{cases}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (inversa) $f^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\{e, rot_{120}, rot_{-120}\}$



triangolo equilatero

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ rot

6 simmetrie : formano un gruppo

$\{e, \sigma_1\}$ è gr.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sim

$\{e, \sigma_2\}$ $\{e, \sigma_3\}$

Tabella di moltiplicazione di un gruppo G:

	E	A	B	C	$\dots$
E	E	A	B	C	$\dots$
A	A	$A \cdot A$	$A \cdot B$	$A \cdot C$	$\dots$
B	B	$B \cdot A$	$B \cdot B$	$B \cdot C$	$\dots$
C	C	$C \cdot A$	$C \cdot B$	$C \cdot C$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$			

$\cdot$	id	rot_{120}	rot_{-120}	σ_1	σ_2	σ_3
id	id	rot_{120}	rot_{-120}			
rot_{120}			id			
rot_{-120}		id				
σ_1				id		
σ_2						
σ_3						

$$\cancel{rot_{120}} \cdot \sigma_1 = \cancel{rot_{120}} \cdot \sigma_3$$

Se il gruppo è simmetrico allora la tabella è simmetrica rispetto alla diagonale.

Inoltre su ogni riga si ripetono permutati tutti gli elementi del gruppo, e così su ogni colonna. Ciò deriva dalla <u>legge di cancellazione</u> che vale per un gruppo.

vale la legge di cancellazione

$$ab = ac \Longrightarrow b = c$$

$$ba = ca \Longrightarrow b = c$$

<u>dim</u> (es) $a \cdot b = a \cdot c$

e denoto l'el. neutro del gruppo

se $g \in G$, con g^{-1} denoto l'inverso

$$ab = ac \implies a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$$

$$\implies (a^{-1}a)\,b = (a^{-1}a)\,c \implies$$

$$e \cdot b = e \cdot c \implies b = c$$

$G, \cdot$ gruppo

$H \subset G$ sottoinsieme, si dirà **sottogruppo** di G se è un gruppo con le stesse operazioni

es: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ $+$

esempio Sottogruppo di $\mathbb{Z}, +$

NUMERI PARI : multipli di 2

anche i multipli di 3

---

se fisso $n \in \mathbb{Z}$,

i multipli di n formano un sottogruppo

2 esercizi standard che usano solo gli assiomi $\longrightarrow$

opposto di $\underline{v}$ è $\underline{w}$

$$\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v} = \underline{0}$$

- $\underline{w}$ è unico
- se $1 \in \mathbb{K}$ è l'identità moltiplicativa

$$\underline{w} = (-1) \cdot \underline{v}$$, dove

-1 è l'opposto additivo di 1