Lezione del 28/11/2013

COMPITINO: GIOVEDÌ 12/12/2013, ore 16,

AULE: G - B1 - F1

Sia $f: V \longrightarrow W$ e siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ due basi di W.

Vogliamo stabilire una relazione tra le matrici associate

$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ e $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$.

TEOREMA [FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE, caso generale]

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \; V \arrow[r, "f"] & W \; \mathcal{C} \arrow[d, "id_W"] \\ V \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"] & W \\[-20pt] \mathcal{B}' & \mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

allora:

$$\boxed{M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(id_W)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)\, M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V)}$$

dim. Si applichi la formula della matrice associata alla composizione a
$f = id_W \circ f \circ id_V$

<u>Quindi</u>: se A è la matrice associata a $f: V \to W$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V e $\mathcal{C} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ di W,

e B è la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$ di V e alla base $\mathcal{C}' = \{\underline{w}_1', \dots, \underline{w}_m'\}$ di W, allora A e B sono legate da una relazione del tipo

$$B = P\,A\,Q$$

con $P \in M_m(\mathbb{K})$, $Q \in M_n(\mathbb{K})$ matrici <u>invertibili</u>.

P è la matrice del cambiamento di base in W, $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$

Q è la matrice del cambiamento di base in V, $\mathcal{B}' \rightsquigarrow \mathcal{B}$

$$P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(id_W) \quad , \quad Q = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

Def. Due matrici A, B legate dalla relazione sopra si diranno SD-equivalenti.

oss. È una relazione di equivalenza ...

riflessiva: $A \sim A$ $\qquad A = I_m A I_n$

simmetrica: $B = PAQ \Rightarrow A = P^{-1} B Q^{-1}$

transitiva: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$$B = PAQ \qquad C = P_1 B Q_1 \Rightarrow$$

$$C = (P_1 P) A (Q Q_1)$$

$$[f(\underline{v}_1) \cdots f(\underline{v}_n)] = [\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m]\, A$$

se $\underline{v} = [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ allora

$$f(\underline{v}) =$$

$$= f\left([\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = [f(\underline{v}_1) \cdots f(\underline{v}_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

CAMBIO BASE:

$$[\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m] = [\underline{w}'_1 \cdots \underline{w}'_m]\, P$$

$$[\underline{v}'_1 \cdots \underline{v}'_n] = [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n]\, Q$$

<u>NOTA</u>: il cambiamento "contrario" avviene con la matrice inversa:

$$[\underline{w}'_1 \cdots \underline{w}'_m] = [\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m]\, P^{-1}$$

$$[\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n] = [\underline{v}'_1 \cdots \underline{v}'_n]\, Q^{-1}$$

se $\quad \underline{v} = [\underline{v}'_1 \cdots \underline{v}'_n]\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ allora

$$f\left([\underline{v}'_1 \cdots \underline{v}'_n]\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}\right) = [f(\underline{v}'_1) \cdots f(\underline{v}'_n)]\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = [\underline{w}'_1 \cdots \underline{w}'_m]\; B \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

$$f\left([\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n]\, Q \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}\right) = [f(\underline{v}_1) \cdots f(\underline{v}_n)]\; Q \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = [\underline{w}_1 \cdots \underline{w}_m]\; A\, Q \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} =$$

$$= [\underline{w}'_1 \cdots \underline{w}'_m]\; P A Q \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

Esempio. Sia $p: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proiezione $(x,y,z) \to (x,y)$.
Scrivere le matrici associate a p nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$ e nelle basi $\mathcal{B}' = \left\{ \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^3$ e

$$\mathcal{C}' = \left\{ \underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \text{ di } \mathbb{R}^2$$

e verificare la formula trovando le matrici di cambiamento base.

Siano $\mathcal{B} = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \}$, $\mathcal{C} = \{ \underline{f}_1, \underline{f}_2 \}$ le basi canoniche.
Si ha $p(\underline{e}_1) = \underline{f}_1$, $p(\underline{e}_2) = \underline{f}_2$, $p(\underline{e}_3) = \underline{0}$, quindi la matrice associata A è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(p)$$

Si ha $\quad p(\underline{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b_{21} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$p(\underline{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b_{22} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$p(\underline{v}_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = b_{13} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b_{23} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

quindi:

la matrice associata a p rispetto a $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ è:

$$B = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(p)$$

MATRICI DI CAMBIAMENTO DI BASE: saranno due matrici P 2×2 e Q 3×3 invertibili

t.c. $\boxed{B = PAQ}$

ricordiamo: $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(id_W)$ cioè $[\underline{f}_1 \ \ \underline{f}_2] = [\underline{w}_1 \ \ \underline{w}_2]\, P$

e $Q = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V)$ cioè $[\underline{v}_1 \ \ \underline{v}_2 \ \ \underline{v}_3] = [\underline{e}_1 \ \ \underline{e}_2 \ \ \underline{e}_3]\, Q$

In questo caso:

$\underline{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [\underline{w}_1 \ \ \underline{w}_2] \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\underline{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\underline{w}_1 \ \ \underline{w}_2] \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$ cioè:

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Inoltre: $\quad [\underline{v}_1 \ \ \underline{v}_2 \ \ \underline{v}_3] = [\underline{e}_1 \ \ \underline{e}_2 \ \ \underline{e}_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = Q$

Verifichiamo:

$$B = P \quad A \quad Q$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

TEOREMA [FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE, CASO $V=W$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}=\mathcal{C}'$]

(stessa base in partenza e in arrivo)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \quad V \arrow[r, "f"] & V \quad \mathcal{B} \arrow[d, "id_V"] \\
V \arrow[u, "id_V"] \arrow[r, "f"] & V \\
\mathcal{C} & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

allora:

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id_V)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

$$= \left(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)\right)^{-1} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

<u>Quindi</u>: se A è la matrice associata a f rispetto alla "vecchia" base $\mathcal{B}$ e B è quella associata rispetto alla "nuova" base $\mathcal{C}$, allora la relazione è:

$$B = P^{-1} A P$$

SIMILITUDINE

dove P è la matrice di cambiamento di base $P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id)$.

$$P^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id)$$

la similitudine è relazione di equivalenza in $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\boxed{A \sim B \Leftrightarrow \exists\, P \text{ invertibile t.c. } B = P^{-1} A P}$$

riflessiva $\quad A \sim A$

basta prendere $P = I$

simmetrica $\quad B = P^{-1} A P$

$$\Rightarrow \quad A = P B P^{-1} = (P^{-1})^{-1} B P^{-1}$$

Sia $Q = P^{-1}$ $\quad A = Q^{-1} B Q$

<u>transitività</u> : $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

$\exists P : \quad B = P^{-1} A P \,, \quad \exists Q$ t.c. $C = Q^{-1} B Q$

$$\Rightarrow \quad C = (Q^{-1} P^{-1}) A (P Q) = (PQ)^{-1} A (PQ)$$

$M_n(\mathbb{K})$ è partizionato in classi di equivalenza

$$f: V \longrightarrow V \qquad f \in L(V)$$

$$\mathcal{B} \qquad \mathcal{B}$$

$$\mathcal{C} \qquad \mathcal{C}$$

$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

$$B = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$$

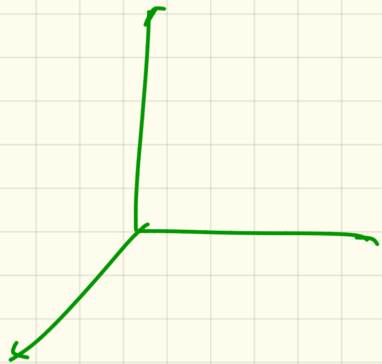
$$B = P^{-1} A P$$

<u>Problema</u> $\exists$ base $\mathcal{B}$ di V t.c.

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sia DIAGONALE ?

D diagonale $\qquad (D)_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$



$$D \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{ESER}}$

$$W \subset \mathbb{R}^4, \quad W = \operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3} \right\}$$

$h \in \mathbb{R}$

$$f_h : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad f(\underline{x}) = A_h \underline{x}$$

$$A_h = \begin{bmatrix} h & 0 & 3-h & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1+h \\ -2 & -2 & 2 & -2 \\ 1-h & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 4 & x \\ 0 & 1 & -3 & y \\ 1 & 0 & 2 & z \\ -2 & -1 & -1 & t \end{array}$$

Base di W:

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & x/2 \\ 0 & 1 & -3 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x/2 \\ 0 & -1 & 3 & t + x \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & x/2 \\ 0 & 1 & -3 & y \\ \hline 0 & 0 & 0 & z - x/2 \\ 0 & 0 & 0 & x + y + t \end{array}$$

$$\begin{cases} z = x/2 \\ x + y + t = 0 \end{cases}$$

si determino $h \in \mathbb{R}$ t.c. $f_h(W) \subset W$ base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$

oss. $f(\underline{v}_1) \in W$, $f(\underline{v}_2) \in W$ $(\#)$

$$f(\underline{v}) \in W \quad \forall\ \underline{v} \in W$$

$$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underline{v} = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{v}_2$$

Allora $f(\underline{v}) = \alpha \underbrace{f(\underline{v}_1)}_{\in W} + \beta \underbrace{f(\underline{v}_2)}_{\in W}$

[siccome W è sottosp. vett.]

$\Longrightarrow$ $f(\underline{v}) \in W$.

$f_h(\underline{v}_1) \in W \qquad A_h \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \in W.$

$$\begin{cases} a_3 = a_1/2 \\ a_1 + a_2 + a_4 = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{rcl|c}
2h + 3 - h & = & 3 + h & 0 \\
4 - 2 - 2h & = & 2 - 2h & 3 - h \\
-4 + 2 + 4 & = & 2 & 0 \\
2 - 2h - 4 & = & -2 - 2h & -2 \\
 & f_h(\underline{v}_1) & & f_h(\underline{v}_2)
\end{array}
$$

$$\neq$$

$2 = \frac{x}{2}$

$x + y + t = 0$

$2 = \frac{3+h}{2}$

$3 - 3h = 0$

$3 - h - 2 = 0$

$$\boxed{h = 1}$$

(3) tìm m để hệ phương trình có nghiệm (A_5)

< 4