$\boxed{27/3/2014}$

Uno degli scopi di questa e delle seguenti lezioni è di spiegare e dimostrare la seguente tabella, che racchiude le forme canoniche affini delle coniche reali.

Introdurremo anche la nozione di <u>forma quadratica</u>, di isometria (in parte già vista) di <u>trasformazione affine</u> e di sottospazi affini.

FORME CANONICHE AFFINI DELLE CONICHE REALI.

			$rg\,\tilde{A}$	$\lvert s(\tilde{A})\rvert$	$\det(A_{33})$	$\lvert s(A)\rvert$
$\mathcal{C}_1$	$x^2+y^2-1=0$	ellisse	3	1	>0	2
$\mathcal{C}_2$	$x^2-y^2-1=0$	iperbole	3	1	<0	0
$\mathcal{C}_3$	$x^2-y=0$	parabola	3	1	0	1
$\mathcal{C}_4$	$x^2-y^2=0$	2 rette reali incidenti	2	0	<0	0
$\mathcal{C}_5$	$x^2-1=0$	2 rette parallele distinte	2	0	0	1
$\mathcal{C}_6$	$x^2=0$	2 rette reali coincidenti	1	1	0	1
$\mathcal{C}_7$	$x^2+y^2+1=0$	ellisse immaginaria	3	3	>0	2
$\mathcal{C}_8$	$x^2+y^2=0$	2 rette complesse coniugate e incidenti in 1 punto	2	2	>0	2
$\mathcal{C}_9$	$x^2+1=0$	2 rette complesse coniugate parallele e distinte	2	2	0	1

Forma canonica: ho un insieme (es. insieme di tutte le coniche) ho una relazione di equivalenza; dove un rappresentante "canonico" in ogni classe di equivalenza.

<u>conica</u>: luogo di zeri di un polinomio di 2° grado in 2 variabili

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0\}$$

def. FORMA QUADRATICA in $\mathbb{R}^n$ è un polinomio omogeneo di grado 2.

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + \sum_{i<j} c_{ij} x_i x_j$$

es A matrice simmetrica, $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y} \qquad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

La forma quadratica associata a φ è

$$Q(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}, \underline{x}) = {}^t\underline{x} A \underline{x}$$

φ prod. scalare su $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ forma quadratica Q

Viceversa? Sia $Q(\underline{x})$ forma quadratica

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2 \overset{?}{=} {}^t\underline{x}\, A\, \underline{x} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 \qquad a_{12} = a_{21}$$

$$a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 =$$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

$$a_{11} = 1 \quad , \quad a_{22} = -1$$

$$2a_{12} = -3 \qquad a_{12} = -\frac{3}{2}$$

$$Q(\underline{x}) = {}^t\underline{x} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

es: $5x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 5x_1x_2 - 3x_1x_4 + x_2x_4 + 2x_2x_3$

$${}^t\underline{x} A \underline{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5/2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & -3 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c'è quindi 1 e 1 solo modo di associare una matrice simmetrica A a una forma quadratica $Q(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, in modo che $Q(\underline{x}) = {}^t\underline{x} A \underline{x}$ (e quindi un prod. scalare $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$)

def.

$Q(\underline{x})$ è definita positiva se $Q(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$

è def. negativa se $Q(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$

indefinita (non degenere) e non definita

$Q(\underline{x})$ non degenere se $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) \doteq \underline{x}^t A \underline{y} \quad \left(Q(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}, \underline{x}) \right)$

è non degenere ($\Leftrightarrow$ A è non singolare)

OSS $Q(\underline{x}) > 0 \iff \varphi > 0 \quad (\iff \text{........})$

$Q(\underline{x}) < 0 \iff \varphi < 0$

$Q(\underline{x})$ indefinita se φ è indefinita.

$Q(\underline{x})$ non deg. $\iff \varphi$ è non. degenere

$P(\underline{x})$ polinomio di grado 2 in n variabili

$P(\underline{x}) = P_2(\underline{x}) + P_1(\underline{x}) + c$

$P_2(\underline{x})$ = omogeneo di grado 2 → è forma quadratica = ${}^t\underline{x} A \underline{x}$

$P_1(\underline{x})$ = parte omogenea di grado 1 = $b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n = \langle \underline{b}, \underline{x} \rangle = {}^t\underline{b}\, \underline{x}$

c = costante

$$P(\underline{x}) = {}^t\underline{x} A \underline{x} + {}^t\underline{b}\, \underline{x} + c$$

$$P(\underline{x}) = x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2 + 5x_1 - 4x_2 + 3$$

$$= {}^t\underline{x} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + [5 \quad -4]\,\underline{x} + 3$$

"aggiungiamo" una variabile x_3 : "OMOGENEIZZIAMO"

$$\tilde{P}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 - x_2^2 + 5x_1x_3 -$$

$$-4x_2x_3 + 3x_3^2 =$$

$$\tilde{P}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \; x_2 \; x_3) \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 5/2 \\ -3/2 & -1 & -2 \\ 5/2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$P(x_1,x_2) = \tilde{P}(x_1,x_2,1) = {}^t\underline{\tilde{x}}\ \tilde{A}\ \underline{\hat{x}} \qquad \underline{\hat{x}} = \begin{bmatrix}\underline{x}\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\1\end{bmatrix}$$

$$P(x_1,x_2) = {}^t\underline{x}\, A\, \underline{x} + {}^t\underline{b}\, \underline{x} + c$$

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} A & \underline{b}/2 \\ \hline \underline{b}/2 & c \end{array}\right]$$

<u>Problema</u>: considereremo le classi di equivalenza dei polinomi di grado 2 in 2 variabili; occorre aver fissato le trasformazioni che vogliamo considerare.

TRASLAZIONI in $\mathbb{R}^n$: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$T(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{t} \qquad \underline{t} \in \mathbb{R}^n$$

<u>os</u>

T <u>non</u> è lineare (se $\underline{t} \neq \underline{0}$)

<u>os</u> $\mathcal{T} = \{ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid T \text{ traslazione} \}$ sono un gruppo (isomorfo a $(\mathbb{R}^n, +)$)

$$T_1 : \underline{x} \to x + \underline{t}_1 \qquad T_1 + T_2 : \underline{x} \to \underline{x} + \underline{t}_1 + \underline{t}_2$$

$$T_2 : \underline{x} \to x + \underline{t}_2$$

ISOMETRIE DI $\mathbb{R}^n$: trasformazioni che conservano le distanze.

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \| \underline{x} - \underline{y} \| = \left(\langle \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y} \rangle \right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

oss. T traslaz. conserva le distanze: $\| (\underline{x} + \underline{t}) - (\underline{y} + \underline{t}) \| = \| \underline{x} - \underline{y} \|$

oss. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare conserva le distanze euclidea

$\iff$ $M_e(f) \in O(n)$. (e base canonica)

$\Leftarrow$ $M \in O(n)$ conserva prod scalare canonico e quindi le distanze

Viceversa se M conserva le distanze, quindi le norme

$\|\underline{x}-\underline{y}\| = \|M\underline{x} - M\underline{y}\| \Rightarrow \|\underline{x}\| = \|M\underline{x}\| \quad \forall \underline{x}$ (si prende $\underline{y}=\underline{0}$)

$$\|\underline{x}\|^2 = {}^t\underline{x}\,\underline{x} = \|M\underline{x}\|^2 = {}^t\underline{x}\left({}^tM\,M\right)\underline{x} = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$\underline{\text{ora}}$ ${}^tM\,M$ è simmetrica

La matrice simmetrica associata a una data forma quadratica è unica $\Rightarrow {}^tM\,M = I \Rightarrow M$ ortogonale

dim "corretta". $\varphi(\underline{x},\underline{y})$ prod scalare

$$\varphi(\underline{x}+\underline{y}, \underline{x}+\underline{y}) = Q(\underline{x}+\underline{y}) =$$

$$= \varphi(\underline{x},\underline{x}) + \varphi(\underline{y},\underline{y}) + 2\varphi(\underline{x},\underline{y}) =$$

$$= Q(\underline{x}) + Q(\underline{y}) + 2\,\varphi(\underline{x}, \underline{y})$$

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{2}\Big(Q(\underline{x}+\underline{y}) - Q(\underline{x}) - Q(\underline{y}) \Big)$$

[quindi Q determine φ]

<u>os</u>. $\varphi(\underline{x}, \underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \implies \varphi(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \quad \forall \underline{x}, \underline{y}$

<u>os</u>. Composizione di isometrie è isometrie [esercizio]

$$\underline{x} \longrightarrow M\underline{x} + \underline{t}$$

se $M \in O(n)$

è isometria

def Una trasformazione affine di $\mathbb{R}^n$ in sè è una applicazione del tipo

$$\underline{x} \longrightarrow A\underline{x} + \underline{b} \qquad A \in GL_n(\mathbb{R}) \qquad \underline{b} \in \mathbb{R}^n$$

Classificazione affine: classificazione a meno di trasformazioni affini (affinità)

sottospazio affine: sia $W \subset \mathbb{R}^n$ sottosp. vettoriale; sia $\underline{t} \in \mathbb{R}^n$

$$S = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \underline{w} \in W \text{ t.c. } \underline{v} = \underline{w} + \underline{t} \} = W + \underline{t}$$

<u>esercizio</u> (1) S determina univocamente W (detto la "direzione" di S); $\underline{t}$ è qualunque vettore $\in S$.

(2). Le affinità formano un gruppo rispetto alla composizione.

$$f : \underline{x} \to A\underline{x} + \underline{b}$$

$$g : \underline{x} \to C\underline{x} + \underline{d}$$

$$g \circ f : \underline{x} \to C(A\underline{x} + \underline{b}) + \underline{d}$$

$$= CA\underline{x} + C\underline{b} + \underline{d}$$

Quindi $f^{-1} : \underline{x} \to A^{-1}\underline{x} - A^{-1}\underline{b}$