Lezione del 27/2/2014

Abbiamo visto teorema spettrale:

$f: V \to V$ endomorfismo simmetrico [hermitiano] allora

$$V = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}$$

Sia $pr_i : V \to V_{\lambda_i}$ la proiezione ortogonale

[che si scrive $\underline{v} \to \sum_{j=1}^{\mu_i} \varphi(\underline{v}, \underline{v}_j^{(i)})\, \underline{v}_j^{(i)}$ , dove

$\underline{v}_1^{(i)}, \dots, \underline{v}_{\mu_i}^{(i)}$ è base ortonormale di $V_{\lambda_i}$ ]

NOTA: $\forall \underline{v} \in V$, si ha, in modo unico:

$$\underline{v} = pr_1(\underline{v}) + \dots + pr_k(\underline{v}) \qquad (*)$$

Applicando $f$ si trova:

$$f(\underline{v}) = \lambda_1 \mu_1(\underline{v}) + \dots + \lambda_k \mu_k(\underline{v}) \qquad (**)$$

<u>Teorema</u> Se $V = V_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_k$ e $f|_{V_i} = \lambda_i Id|_{V_i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,k$ [cioè se $V$ si decompone nella $\oplus$ ortogonale degli autospazi di $f$] allora $f$ è simmetrico [hermitiano].

<u>dim.</u> Per ipotesi valgono $(*)$ e $(**)$. Quindi:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{v})) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i(\underline{v}), \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mu_j(\underline{v})\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \varphi(\mu_i(\underline{v}), \mu_i(\underline{v}))$$

$$\varphi(f(\underline{v}), \underline{v}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i(\underline{v}), \sum_{j=1}^{n} \mu_j(\underline{v})\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \varphi(\mu_i(\underline{v}), \mu_i(\underline{v}))$$

sfruttando l'ortogonalità dei $V_{\lambda_j}$ (e il fatto che i $\lambda \in \mathbb{R}$ per il caso hermitiano).

## Applicazioni.

**Teorema.** Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. Consideriamo il prodotto associato ad $A$: $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$ e indichiamo con $\iota_+(A) = \iota_+(\varphi)$, $\iota_-(A) = \iota_-(\varphi)$, $\iota_0(A) = \iota_0(\varphi)$. Allora:

$\iota_+(A) =$ n° autovalori $> 0$ di $A$ (con molteplicità);

$\iota_-(A) =$ n° " $< 0$ di $A$ " ;

$\iota_0(A) = \mu_a(0)$ (molteplicità alg. di $0$)

dim $\varphi$ è endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto scalare canonico (perché $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$, che è simmetrica, se $\mathcal{B}$ è la base canonica). Per il teo. spettrale sulle matrici simmetriche,

$$\exists\ O \in O_n \quad \text{t.c.} \quad O^{-1} A\, O = {}^t O\, A\, O = D,$$

$D$ matrice diagonale. Poiché $D$ è simile ad $A$, $A$ e $D$ hanno gli stessi autovalori, che saranno gli elementi sulla diagonale di $D$. Ma $A$ e $D$ sono anche congruenti, quindi $\sigma(A) = \sigma(D)$. Poiché $D$ è diagonale, $i_+(D) =$ n° elementi positivi sulla diagonale, $i_-(D) =$ n° el. negativi sulla diagonale, $i_0(D) =$ n° zeri sulla diagonale, da cui si conclude.

NOTAZIONE. Data $A$ reale simmetrica, si scriverà $A > 0$ se il prodotto scalare $(\underline{x}, \underline{y}) \to {}^t\underline{x} A \underline{y}$ su $\mathbb{R}^n$ è def. $> 0$. Analogamente, si scriverà $A < 0$ se tale prodotto è def $< 0$.
Si noti che per un prodotto scalare $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$, si ha che $\varphi > 0 \iff M_{\mathcal{B}}(\varphi) > 0$, qualunque sia la base $\mathcal{B}$, e lo stesso $\varphi < 0 \iff M_{\mathcal{B}}(\varphi) < 0$.

Corollario. $A > 0 \iff A$ ha tutti autovalori $> 0$;
$A < 0 \iff A$ ha tutti autovalori $< 0$.

**Corollario** Se si sanno i segni delle radici del polinomio caratteristico, si determina la segnatura di $A$.

---

## Criterio di positività di un prodotto scalare

Sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ la matrice associata a un prodotto scalare rispetto a una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

Allora $\varphi > 0 \iff$ sono positivi tutti i determinanti principali $\begin{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{bmatrix}$ formati con le prime $i$ righe e colonne.

---

$\Rightarrow$ Sia $\mathcal{B}_i = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i\}$ e $V_i = \mathrm{Span}\, \mathcal{B}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Allora $A^{1\dots i}_{1\dots i} = M_{\mathcal{B}_i}(\varphi|_{V_i})$. Siccome $\varphi|_{V_i} > 0$,

$\det A^{1\dots i}_{1\dots i} > 0$.

$\Leftarrow$ È chiaro che, essendo $a_{11} > 0$, $\varphi|_{V_1} > 0$.

Per induzione, supponiamo $\varphi|_{V_i} > 0$, $i \geq 1$,

e dimostriamo che $\varphi|_{V_{i+1}} > 0$. Per ipotesi induttiva,

$\iota_+(\varphi|_{V_{i+1}}) \geq i$; poiché $\det A^{1,\dots,i+1}_{1,\dots,i+1} > 0$, segue che non può

essere $\iota_-(\varphi|_{V_{i+1}}) = 1$, quindi $\iota_-(\varphi|_{V_{i+1}}) = 0$ e $\varphi|_{V_{i+1}} > 0$.

---

**Oss.** $\varphi > 0 \iff \forall$ determinante principale è $> 0$

**Criterio di negatività.** $\varphi < 0 \iff$ segno del $\det A^{1\dots i}_{1\dots i} > 0$ se $i$ pari, $< 0$ se $i$ dispari.

[dim: esercizio (modificare la dim. del criterio di positività)].

---

**def.** Un prodotto scalare $\varphi$ si dice semi-definito positivo (e si scrive $\varphi \geq 0$) se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0$, $\forall \underline{v}$; si dice semi-definito negativo ($\varphi \leq 0$) se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0$, $\forall \underline{v}$.

Scriveremo $A \geq 0$ se $A$ è <u>semidefinita positiva</u> (${}^t\underline{x} A \underline{x} \geq 0$, $\forall \underline{x}$) e analogamente $A \leq 0$ (${}^t\underline{x} A \underline{x} \leq 0$, $\forall \underline{x}$).

**esercizio:** $A \geq 0 \iff$ gli autovalori di $A$ sono $\geq 0$.

$\phantom{esercizio: A} \leq \phantom{\iff \text{gli autovalori di } A \text{ sono }} \leq$

Sia $A$ reale (o complessa).
Allora ${}^tA\,A \geq 0$, e $A\,{}^tA \geq 0$ ($AA^* \geq 0$, $A^*A \geq 0$). Se $A$ non singolare, allora ${}^tAA > 0$, $A{}^tA > 0$ (e lo stesso $A^*A > 0$, $AA^* > 0$).

Infatti: ${}^t\underline{x}\,{}^tAA\underline{x} = {}^t(A\underline{x})(A\underline{x}) = \|A\underline{x}\|^2 \geq 0$, $= 0 \iff A\underline{x} = \underline{0}$. Se $A$ è non-sing., $A\underline{x} = \underline{0} \iff \underline{x} = \underline{0}$.
Gli altri casi sono simili (esercizio).

Proposizione. Data $A > 0$, $\exists$ unica $B > 0$ t.c. $B^2 = A$ [tale $B$ si potrà indicare con $B = \sqrt{A}$].

dim.

Sia $O \in O_n$ t.c. ${}^tO A O = D$ diagonale. Come detto prima, se $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ allora $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Sia $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$; sia $B = O \sqrt{D}\, {}^tO$. Allora

$B^2 = O \sqrt{D}\, {}^tO\, O \sqrt{D}\, {}^tO = O D\, {}^tO = A$, quindi $B$ è una radice di $A$ e $B > 0$.

Per l'unicità: sia $C > 0$ t.c. $C^2 = A$; se $\underline{v}$ è autovettore

per $C$, cioè $C\underline{v} = \mu \underline{v}$, allora $C^2 \underline{v} = A\underline{v} = \mu^2 \underline{v}$.
Segue che se $V_{C,\mu}$ è l'autosp. relativo a un certo autova= lore di $C$, allora $\mu^2$ è autovalore per $A$ e $V_{C,\mu} \subset V_{A,\mu^2}$.
Se $\mu_1, \dots, \mu_k$ sono tutti gli autovalori distinti di $C$, (che sono $>0$ perché $C>0$) allora i $\mu_i^2$ sono anch'essi distinti e siccome

$$V = V_{C,\mu_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{C,\mu_k}$$

si ha anche

$$V = V_{A,\mu_1^2} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{A,\mu_k^2}$$

cioè $V_{C,\mu_i} = V_{A,\mu_i^2}$. Segue che $C$ deve avere gli stessi autospa= zi di $A$, su ognuno dei quali agisce per moltiplicazione per la radice del corrispondente autovalore di $A$. Questo caratterizza $C$ in modo unico.

**Prop.** $A, B$ simmetrice t.c. $AB = BA$. Allora $A$ e $B$ si diagonalizzano simultaneamente tramite una <u>matrice ortogonale.</u> ⟵ SIMILITUDINE

dim [esercizio].

CONGRUENZA

**Prop.** Date $A, B$ simmetriche, $A > 0$, $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c.

$$ {}^tP A P \,,\ {}^tP B P \quad \text{sono diagonali.} $$

**dim.** Poiché $A > 0$, $\exists\, P_1$ t.c. ${}^tP_1 A P_1 = I$. Sia $B_1 = {}^tP_1 B P_1$, che è simmetrica. Per il teo. spettrale, $\exists\, O \in O_n$ t.c. ${}^tO B_1 O = D$ diagonale. Quindi

$${}^tO\,{}^tP_1\,A\,P_1\,O = {}^tO\,I\,O = I,$$ e

$${}^tO\,{}^tP_1\,B\,P_1\,O = D$$ diagonale.

Ponendo $P = P_1 O$ si conclude.

**Prop.** i) $O \in O_n \Rightarrow \det O = \pm 1$

ii) $U \in \mathbb{U}_n \Rightarrow |\det U| = 1$ (cioè $\det U$ è un numero complesso di modulo 1)

**dim** i) $\det({}^tO\,O) = \det {}^tO \det O = (\det O)^2 = \det I = 1$

e $\det O \in \mathbb{R}$.

ii) $\det U^* U = \det U^* \det U = \det {}^t\bar{U} \det U = \det \bar{U} \det U = \overline{\det U} \cdot \det U = |\det U|^2 = 1 \Rightarrow |\det U| = 1$

---

**oss.** (i) $SO_n = \{ O \in O_n \mid \det O = 1 \}$ è un sottogruppo di $O_n$ (gruppo ortogonale speciale).

(ii) $SU_n = \{ U \in \mathbb{U}_n \mid \det U = 1 \}$ è sgr. di $\mathbb{U}_n$.

Si noti che possiamo vedere $O_n \subset U_n$ ($e$ $SO_n \subset SU_n$).

<u>Prop.</u> Se $\lambda$ è autovalore di $U \in U_n$ allora $\lambda$ è un numero complesso di modulo 1 ($\lambda = \cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta = e^{i\theta}$).

<u>dim</u> $U\underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \|U\underline{x}\|^2 = {}^t\overline{(U\underline{x})}(U\underline{x}) = {}^t\overline{\underline{x}}\, U^* U \underline{x} = \|\underline{x}\|^2 =$

$$= {}^t\overline{(\lambda \underline{x})}(\lambda \underline{x}) = \bar{\lambda}\lambda\, {}^t\overline{\underline{x}} \cdot \underline{x} =$$

$$= |\lambda|^2 \|\bar{x}\|^2$$

$$\Rightarrow |\lambda| = 1$$

---

<u>Corollario</u> $O \in O_n$ ha autovalori della forma $\pm 1$ oppure a coppie $\cos\theta + i \operatorname{sen}\vartheta$, $\cos\vartheta - i \operatorname{sen}\theta$, con la stessa molteplicità.

Teorema. $A \in M_n(\mathbb{C})$ si triangolarizza tramite una matrice unitaria (cioè $\exists\, U \in \mathcal{U}_n$ t.c. $U^* A U = T$ triangolare).

dim. Sia $\underline{x}_1 \in \mathbb{C}^n$ autovettore, relativo a $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, per $A$. Estendiamo a base ortonormale rispetto al prodotto hermitiano canonico: $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$. La matrice $U_1 = [\underline{x}_1 | \cdots | \underline{x}_n]$ è unitaria e per costruzione

$$U_1^* A U_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B_1 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right]$$

Per induzione, $\exists\, U_2 \in \mathcal{U}_{n-1}$ t.c. $U_2^* A_1 U_2 = T_1$ con $T_1$ triangolare superiore (di ordine $n-1$). Sia:

$$U_3 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$ . Si verifica subito che $U_3 \in \mathcal{U}_n$

verificare

$$U_3^* U_3 = I$$

e che $U_3^* U_1^* A U_1 U_3 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & B_1 U_2 \\ \hline 0 & U_2^* A_1 U_2 \end{array}\right] =$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & T_1 \end{array}\right]$$

che è triangolare.

__Corollario__ $U \in \mathcal{U}_n$ si diagonalizza con matrice unitaria

__dim__

$\exists \; U_1 \in \mathcal{U}_n$ t.c. $U_1^* U U_1 = T$ triangolare.

Allora $T \in \mathcal{U}_n$, e quindi le righe devono essere ortonormali per il prodotto hermitiano canonico.

Ne segue che $T$ è diagonale [esercizio: iniziare dal "fondo"...].

$$\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & \cdots & & 0 & * \end{matrix}$$

$$T^* T = (U_1^* U U_1)^* (U_1^* U U_1) =$$

$$= \cancel{U_1^*} \cancel{U^*} \cancel{U_1} \cancel{U_1^*} \cancel{U} \cancel{U_1} = I$$

esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A > 0 \ ?$$

$$\det A = -3 < 0 \qquad A \text{ non è } > 0 .$$

$i_+(A) \geq 1$ perché $a_{11} > 0$

$i_0(A) = 0$ $\det A \neq 0$

$i_-(A) \geq 1$ perché $\det A < 0$

$$\sigma(A) = (1, 1, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$i_+(A) \geq 1$$

$$a_{11} > 0$$

$$\det A = 1 > 0$$

$$\sigma(A) = (2, 0, 0)$$

$$\Rightarrow A > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$i_+(A) \geq 1$

$a_{11} > 0$

$a_{22} = 0 \qquad {}^t e_2 A e_2 = 0$

$\Downarrow$

$A$ non è definita

$\text{rk}\, A = 3$

$\det A > 0$

$\begin{cases} (1,2,0) \\ (2,1,0) \end{cases}$

---

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to$ è non degenere

non è definita $\left( \begin{array}{l} \text{né} > 0 \\ \text{né} < 0 \end{array} \right)$

$\sigma = (1,1,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$i_+ \geq 1$ perché $a_{11} > 0$

$i_+ \geq 2$ perché

$$\boxed{\varphi|_{\mathrm{Span}\{e_1, e_3\}} > 0}$$

$\Rightarrow A' > 0$ (è diagonale, ~~tutti~~ entrambi $> 0$)

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{22} = 0 \\ \mathrm{rk}\, A = 3 \\ i_+ \geq 2 \end{cases}$$

$$\sigma = (2, 1, 0)$$

$A = {}^t N N$ $\quad$ $N$ non sing $\Rightarrow$ $A > 0$

---

Viceversa se $A > 0$ $\exists N$ non sing t.c. $A = {}^t N N$

- - - - - - -

basta prendere $N = \sqrt{A}$, che è simmetrica $(> 0)$. Allora

${}^t N N = N \cdot N = N^2 = A$