Lezione del 25/2/2014

SPAZI EUCLIDEI

Def. Uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$, dotato di un prodotto scalare $\varphi > 0$ si dirà SPAZIO EUCLIDEO.

Es. 1) $\mathbb{R}^n$ con prodotto canonico

2) $V = M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,B) = tr({}^tA\,B)$ [verificare!]

3) $V = \mathbb{R}_n[x]$, $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)\,q(x)\,dx$

Def. Si definisce NORMA di un vettore $\underline{v} \in V$ il numero

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v},\underline{v})}$$

NOTA $\|\underline{v}\| \geq 0 \quad \forall \underline{v}$, e $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$.

Prop. (i) $\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\|+\|\underline{w}\|$, $\forall \underline{v},\underline{w} \in V$; [DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE]

(ii) $\|\alpha \underline{v}\| = |\alpha|\, \|\underline{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v} \in V$

(iii) $|\varphi(\underline{v},\underline{w})| \leq \|\underline{v}\|\, \|\underline{w}\|$, $\forall \underline{v},\underline{w} \in V$ [DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ]

dim. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\|\underline{v}+t\underline{w}\|^2 \geq 0$. Sviluppando:

$$\|\underline{v}+t\underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v}+t\underline{w}, \underline{v}+t\underline{w}) = \varphi(\underline{v},\underline{v}) + 2t\,\varphi(\underline{v},\underline{w}) + t^2 \varphi(\underline{w},\underline{w}) =$$

$$= \|\underline{v}\|^2 + 2t\,\varphi(\underline{v},\underline{w}) + t^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$ quindi

$$\Delta = \varphi(\underline{v},\underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0,$$ che dà (iii).

Mettendo $t=1$, si trova, per (iii):

$$\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 =$$

$$= (\|\underline{v}\|+\|\underline{w}\|)^2,$$ che dà (i).

(ii) $\|\alpha \underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\alpha \underline{v}, \alpha \underline{v})} = \sqrt{\alpha^2 \varphi(\underline{v}, \underline{v})} = |\alpha| \, \|\underline{v}\|$.

<u>Esercizi</u> 1) [teorema di Pitagora] Se $\underline{v} \perp \underline{w}$ allora
$\|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}+\underline{w}\|^2$

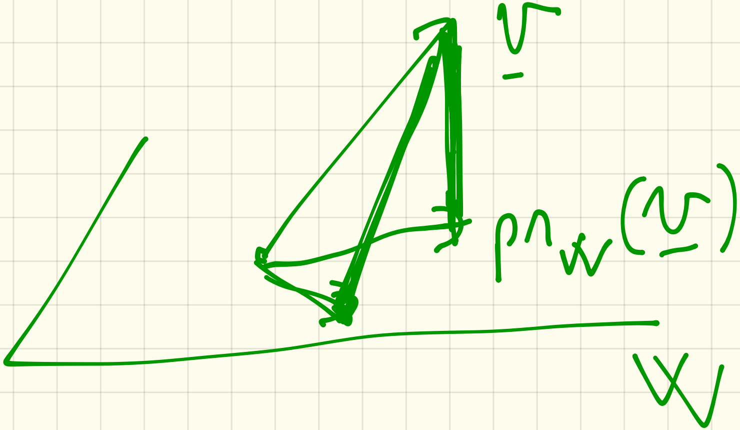
2) [Le diagonali di un rombo sono ortogonali]
Se $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$ allora

$$\varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}-\underline{w}) = 0$$

3) $W \subset V$, $\underline{v} \in V$. Allora

$$\|\underline{v} - p_W(\underline{v})\| < \|\underline{v} - \underline{w}\| \quad \forall \underline{w} \in W, \quad \underline{w} \neq p_W(\underline{v}).$$

$$\left[\underline{v} - \underline{w} = \overbrace{\underline{v} - p_W(\underline{v})}^{\in W^\perp} + \overbrace{p_W(\underline{v}) - \underline{w}}^{\in W} \overset{[es. 1)]}{\Longrightarrow} \|\underline{v} - \underline{w}\|^2 = \|\underline{v} - p_W(\underline{v})\|^2 + \|p_W(\underline{v}) - \underline{w}\|^2 \right]$$


$\underline{v}$
$pr_W(\underline{v})$
W

Poichè $i_+(\varphi) = \dim V$, si trovano basi <u>ORTONORMALI</u>

<u>Def.</u> Una base di V, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si dice <u>ortonormale</u> se è ortogonale e se $\|\underline{v}_i\| = 1$, $\forall\, i = 1, \dots, n$. ($n = \dim V$)

<u>Es.</u> 1) La base canonica di $\mathbb{R}^n$, rispetto al prodotto scalare canonico, è una base ortonormale.

2) Rispetto al prodotto $\varphi(A, B) = tr({}^tA B)$, la base "canonica" $E^{(ij)}$ è ortonormale.

Algoritmo di ortonormalizzazione di GRAM-SCHMIDT.

Data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di uno sp. euclideo (V, φ), si può algoritmicamente trovare una base ortonormale $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$, tale che $\forall\, i = 1, \dots, n$

$$V_i = \text{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i\} = \text{Span}\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_i\}$$

[in altri termini, il cambiamento di base è triangolare].

Prendiamo: $\underline{u}_1 = \underline{v}_1$ e in generale proseguiamo ricorsivamente:

$$\underline{u}_i = \underline{v}_i - \frac{\varphi(\underline{v}_i, \underline{u}_1)}{\varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_1)} \underline{u}_1 - \cdots - \frac{\varphi(\underline{v}_i, \underline{u}_{i-1})}{\varphi(\underline{u}_{i-1}, \underline{u}_{i-1})} \underline{u}_{i-1} \qquad , i = 2, \dots, n.$$

Per induzione, si vede subito che $\underline{u}_i = \underline{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \underline{v}_j$, $i = 1, \dots, n$, cioè la matrice delle coordinate degli $\underline{u}_i$ rispetto alla base $\underline{v}_j$ è triangolare superiore, con 1 sulla diagonale.

Segue che gli $\underline{u}_i$ formano una base, e anche che $V_i = \mathrm{Span}\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i\}$. Inoltre $\underline{u}_i \perp \mathrm{Span}\{\underline{u}_1, \dots, u_{i-1}\}$ per costruzione, quindi gli $\underline{u}_i$ sono a 2 a 2 ortogonali.

Per concludere, facciamo il cambiamento $\underline{w}_i = \frac{1}{\|\underline{u}_i\|} \underline{u}_i$, trovando una base ortonormale.

OSS Le coordinate in base ortonormale assumono aspetto interessante:

Se $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è base ortonormale, e se

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{v}_j \quad , \quad \text{allora}$$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \underline{v}_j, \underline{v}_i\right) = x_i$$

Quindi: $\boxed{\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\underline{v}, \underline{v}_j)\, \underline{v}_j}$, $\forall \underline{v} \in V$.

Se la base è solo ortogonale (per prodotti scalari non degeneri, non necess. positivi) allora $x_i = \dfrac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$ è il coeff. di Fourier.

Disuguaglianza di Bessel: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ ortonormali $\Rightarrow$

$$\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$$

infatti, estendendo a base ortonormale

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n$$

si ha:

$$\|\underline{v}\|^2 = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \varphi\left(\sum \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)\, \underline{v}_i \,,\, \sum \varphi(\underline{v}, \underline{v}_j)\, \underline{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$$

OPERATORI SIMMETRICI E OPERATORI ORTOGONALI.

Sia (V, φ) uno sp. vett. $/\mathbb{R}$ con prodotto scalare $\varphi > 0$.

<u>Def</u> 1) Un endomorfismo $f: V \to V$ si dice **SIMMETRICO** se $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ vale

$$\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$$

2) $f: V \to V$ si dice **ORTOGONALE** se $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ vale

$$\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$$

<u>oss.</u> Si possono dare analoghe definizioni anche se non si richiede $\varphi > 0$.

OSS. 1) Gli operatori simmetrici formano un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(V)$ (con l'operazione di $+$ e prodotto per uno scalare).

2) Gli operatori ortogonali formano un sottogruppo di $GL(V) = \{ f : V \to V \mid f \text{ invertibile} \}$, con l'operazione di composizione.

3) f ortogonale $\Rightarrow$ f <u>conserva le distanze</u> [quindi un operatore ortogonale è un' ISOMETRIA LINEARE di V]

Infatti $\| \underline{v} - \underline{w} \|^2 = \varphi(\underline{v}-\underline{w}, \underline{v}-\underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}-\underline{w}), f(\underline{v}-\underline{w})) =$
$\varphi(f(\underline{v}) - f(\underline{w}), f(\underline{v}) - f(\underline{w})) = \| f(\underline{v}) - f(\underline{w}) \|^2$

PROPOSIZIONE. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base ortonormale di V, φ $(\varphi > 0)$.
Allora $f \in \mathcal{L}(V)$ è simmetrico $\Leftrightarrow$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica.

dim.

Si ha $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I$ [ricordiamo: $a_{ij} = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$]; sia $B = M_{\mathcal{B}}(f)$.

$$\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = {}^t[f(\underline{v})]_{\mathcal{B}} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = {}^t(B[\underline{v}]_{\mathcal{B}}) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} =$$

$${}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \, {}^tB \, [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$$

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}} [f(\underline{w})]_{\mathcal{B}} = {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}} B [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$$

Quindi f è simmetrico $\Leftrightarrow$

$${}^t\underline{x}\,{}^tB\,\underline{y} = {}^t\underline{x}\,B\,\underline{y}\,,\ \forall \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n \iff$$

$${}^t\underline{x}\left({}^tB - B\right)\underline{y} = 0\,,\ \forall \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n \iff {}^tB - B = 0 \iff B = {}^tB\,.$$

$$\left[\ \forall \text{ matrice } M = (m_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}} \quad \text{si ha} \quad {}^t\underline{e}_i\,M\,\underline{e}_j = m_{ij}\ \right]$$

---

oss. In una base qualunque non si otterrà $M_{\mathcal{B}}(f)$ simmetrica: infatti, coniugando per $P \in GL_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica B, non si ottiene in generale una matrice simmetrica $\left({}^t(P^{-1}BP) = {}^tP\,B\,{}^tP^{-1} \overset{?}{=} P^{-1}BP\right.$. Vale l'uguaglianza se $P^{-1} = {}^tP$, cosa importante che utilizzeremo dopo$\left.\right)$.

<u>Proposizione</u>. V, φ come sopra; $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base ortonormale. $f \in \mathcal{L}(V)$ è operatore ortogonale $\iff$ la matrice

$M_{\mathcal{B}}(f) = B$ ha la proprietà ${}^tB\,B = B\,{}^tB = I$ (cioè $B^{-1} = {}^tB$).

<u>DEF</u>. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ t.c. ${}^tA\,A = A\,{}^tA = I$ si dice **ORTOGONALE**. Si denota con $O_n(\mathbb{R})$ (o semplicemente con O_n) il gruppo delle matrici ortogonali

---

<u>dim</u>.

Con le notazioni della dim. della prop. precedente, si ha

$$\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = {}^t[f(\underline{v})]_{\mathcal{B}}[f(\underline{w})]_{\mathcal{B}} = {}^t(B[\underline{v}]_{\mathcal{B}})\ B[\underline{w}]_{\mathcal{B}} =$$

$$= {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}}\ {}^tB\, B[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$$

e

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}}[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$$

Quindi f è ortogonale $\Leftrightarrow$

$${}^t\underline{x}\ {}^tB B \underline{y} = {}^t\underline{x}\, \underline{y} \quad , \forall\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow$$

$${}^t\underline{x}({}^tBB - I)\underline{y} = 0 \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \quad {}^tBB - I = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^tBB = I\ .$$

oss. Anche qui, coniugando una matrice ortogonale, non si ottiene una matrice ortogonale in generale

$$\left({}^t(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1}P^{-1}AP \neq I \quad \text{in generale,} \right.$$

$$\left. \text{a meno che ad es } P \in O_n \right)$$

Prop. 1) $A \in O_n \Leftrightarrow$ le colonne (e le righe) di A sono base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prod. scalare canonico;

2) $A \in O_n \Leftrightarrow A$ conserva il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$;

3) $A \in O_n \Leftrightarrow A$ manda basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ (risp. al prodotto canonico) in basi ortonormali.

dim 1) Segue da ${}^tAA = I \iff {}^tA^i A^j = \delta_{ij}$ (e similmente le colonne).

2) ${}^t(A\underline{x})(A\underline{y}) = {}^t\underline{x}\,{}^tAA\underline{y} = {}^t\underline{x}\,\underline{y}$, $\forall \underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n \iff$

${}^t\underline{x}({}^tAA - I)\underline{y} = 0$, $\forall \underline{x},\underline{y} \iff {}^tAA = I$

3) $\Rightarrow$ deriva da 2). $\Leftarrow$ $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$ basi ortonormali

$\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n$ ''

allora $B = [\underline{x}_1 | \cdots | \underline{x}_n]$, $C = [\underline{y}_1 | \cdots | \underline{y}_n] \in O_n$

per 1). Se $AB = C \Rightarrow A = CB^{-1} \in O_n$.

$= C\,{}^tB$

B e C sono matrici ortogonali per 1)

Prodotti hermitiani.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si introduce variazione prodotto scalare, più adatta per le "misure".

Def. V sp. vett. $/\mathbb{C}$; $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ si dice <u>prodotto hermitiano</u> se

i) φ è $\mathbb{C}$-lineare nella 2^a componente

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w} + \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}, \underline{u}) \quad , \forall\, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

$$\varphi(\underline{v}, \alpha \underline{w}) = \alpha\, \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad , \forall\, \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

ii) $$\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$$

Segue che nella 1ª componente φ è <u>anti-lineare</u>:

$$\varphi(\underline{u}+\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u}+\underline{v})} = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})}$$

$$= \varphi(\underline{u}, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$$

$$\varphi(\alpha \underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \alpha \underline{v})} = \overline{\alpha\, \varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \bar{\alpha}\, \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})}$$

$$= \bar{\alpha}\, \varphi(\underline{v}, \underline{w})$$

---

esempio. 1) Prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$:

$$\varphi(\underline{z}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i w_i \qquad \sum z_i \overline{w_i}$$

2) $V = M_n(\mathbb{C})$. $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}({}^t\bar{A} B)$

3) $V = \mathbb{C}_n[z]$. $\varphi(p(t), q(t)) = \overline{p(0)}\, q(0)$

Segue anche che

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})} \Rightarrow \boxed{\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}}, \quad \forall \underline{v} \in V.$$

Se $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V, allora si ha:

se $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \underline{x}$, $[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \underline{y}$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t\overline{\underline{x}} \, A \, \underline{y}$$

dove $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ha coeff. $a_{ij} = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$.

[Infatti: $\varphi\left(\sum x_i \underline{v}_i, \sum y_j \underline{v}_j\right) = \sum \overline{x}_i y_j \, \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$]

NOTA: $a_{ji} = \varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_i) = \overline{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)} = \overline{a_{ij}}$

DEF. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ t.c. ${}^t A = \bar{A}$ $\left[\Leftrightarrow \underset{\text{AGGIUNTA di } A}{\overset{{}^t\bar{A}}{\overset{\shortparallel}{A^*}}} = A \right]$ si chiama hermitiana (hermitiana reale $\Rightarrow$ simmetrica)

${}^t\bar{A} = A$

Se $\mathcal{B}' = \{ \underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n \}$ è un'altra base, si ha:

$$\boxed{M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = P^* \, M_{\mathcal{B}}(\varphi) \, P}$$

dove $P = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id)$:

$$\varphi(\underline{v}'_i, \underline{v}'_j) = {}^t\overline{[\underline{v}'_i]_{\mathcal{B}}} \, M_{\mathcal{B}}(\varphi) \, [\underline{v}'_j]_{\mathcal{B}} =$$

$$= {}^t\overline{P_i} \, M_{\mathcal{B}}(\varphi) \, P_j = ({}^t\bar{P} \, M_{\mathcal{B}}(\varphi) \, P)_{ij}$$

Si hanno teoremi analoghi ai prodotti scalari sugli spazi vett.

1. Ogni sp. vett $V / \mathbb{C}$ con φ hermitiano ha base ortogonale.

2. Siccome $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, $\forall \, \underline{v} \in V$, si può definire come nel caso reale prodotti def > 0 e < 0, e quindi $i_+(\varphi)$, $i_-(\varphi)$, $i_0(\varphi)$ e segnatura σ. Vale un teorema di Sylvester del tutto analogo al caso reale.

Sia $V/\mathbb{C}$ e φ hermitiano def. positivo.

Def. $f: V \to V$ t.c. $\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ si dice operatore hermitiano.

Prop. Sia data una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$.
Un operatore $f \in \mathcal{L}(V)$ è hermitiano se e solo se $M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.

---

dim $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I$, quindi nella base $\mathcal{B}$ φ si scrive come il prodotto canonico. Allora se $B = M_{\mathcal{B}}(f)$,

$$\varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = {}^t\overline{(B[\underline{v}]_{\mathcal{B}})}\,[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = {}^t\overline{[\underline{v}]_{\mathcal{B}}}\,{}^t\overline{B}\,[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$$ e

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = {}^t\overline{[\underline{v}]_{\mathcal{B}}}\,(B[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = {}^t\overline{[\underline{v}]_{\mathcal{B}}}\,B\,[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$$

Quindi f è hermitiano $\Leftrightarrow$

$$ {}^t\underline{\bar{x}}\ {}^t\bar{B}\ \underline{y} = {}^t\underline{\bar{x}}\ B\ \underline{y}, \quad \forall\, \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n $$

$\Leftrightarrow$ (come prima) $\quad B^* = B$

Def $f \in \mathcal{L}(V)$ si dice <u>unitario</u> se

$$ \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}), \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V. $$

Def. $M \in M_n(\mathbb{C})$ si dice UNITARIA se $M M^* = M^* M = I$,

Quindi $M^* = M^{-1}$ (unitaria reale $\Rightarrow$ ortogonale).

Prop. $\mathcal{B}$ base ortonormale. Allora f è unitario $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice unitaria.

---

dim. $\varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = {}^t\overline{(B[\underline{v}]_{\mathcal{B}})}\,(B[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = {}^t\overline{[\underline{v}]_{\mathcal{B}}}\,{}^t\overline{B}\,B\,[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$;

$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = {}^t\overline{[\underline{v}]_{\mathcal{B}}}\,[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Quindi

f è unitario $\iff$ ${}^t\overline{B}\,B = I$

---

oss. Le matrici unitarie formano un gruppo rispetto alla moltiplicazione, denotato U_n $(\subset GL_n(\mathbb{C}))$

Come per O_n si ha:

<u>Prop.</u> 1) $A \in U_n \iff$ le colonne (e le righe) di A sono base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ risp. al prod. hermitiano canonico;

2) $A \in U_n \iff A$ conserva il prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^n$;

3) $A \in U_n \iff A$ manda basi ortonormali in basi ortonormali.

[tutto risp. al prodotto hermitiano canonico]

TEOREMA V sp. vett. $/\mathbb{C}$ φ hermitiano >0. Sia $f\in\mathcal{L}(V)$ hermitiano. Allora tutti gli autovalori di f sono reali.

---

dim Sia $\lambda\in\mathbb{C}$ autovalore di f, $\underline{v}\in V$ autovettore :

$f(\underline{v})=\lambda\underline{v}$. Moltiplichiamo:

$$\lambda\varphi(\underline{v},\underline{v})=\varphi(\underline{v},\lambda\underline{v})=\varphi(\underline{v},f(\underline{v}))=\varphi(f(\underline{v}),\underline{v})=\varphi(\lambda\underline{v},\underline{v})=\bar{\lambda}\varphi(\underline{v},\underline{v})$$

quindi $\lambda\|\underline{v}\|^2=\bar{\lambda}\|\underline{v}\|^2$.

Poiche $\underline{v}\neq\underline{0}$ segue $\lambda=\bar{\lambda}$.

Coroll. $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitiana $\Rightarrow$ A ha tutti gli n autovalori reali.

---

dim. L'applicazione $\underline{x} \to A\underline{x} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è hermitiana rispetto al prodotto hermitiano canonico. ↖ È quella hermitiana

---

Coroll. $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica $\Rightarrow$ A ha tutti autovalori reali.

Coroll. V sp. vett. $/\mathbb{R}$, $\varphi > 0$. Se $f \in \mathcal{L}(V)$ è simmetrico allora f ha tutti gli autovalori reali.

---

dim. Rispetto a una base ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica.

Teorema $f: V \to V$ operatore simmetrico (o hermitiano).
Allora se $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$ sono autovalori allora $V_\lambda \perp V_\mu$.

---

dim. $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$, $f(\underline{w}) = \mu \underline{w}$ $\Rightarrow$

$$\lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu \underline{w}) =$$

$$\mu \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu) \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \Rightarrow [\text{poiché } \lambda \neq \mu]$$

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0.$$

<u>Teorema</u>. $V/\mathbb{R}$ con $\varphi>0$ [oppure $V/\mathbb{C}$ con φ hermitiano >0].
Sia $f\in\mathcal{L}(V)$ simmetrico [o f hermitiano].
Se $W\subset V$ è f-invariante $\Rightarrow$ $W^\perp$ è f-invariante.

<u>dim</u>.

$\forall\, \underline{v}\in W,\ \underline{w}\in W^\perp$, $\quad \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))=\varphi(f(\underline{v}),\underline{w})=0$

perché $f(\underline{v})\in W$; quindi $f(\underline{w})\in W^\perp$ $\blacksquare$

TEOREMA SPETTRALE.

V sp. vett. $/\mathbb{R}$ $\varphi > 0$ [oppure $V/\mathbb{C}$, φ hermitiano > 0].
$f \in \mathcal{L}(V)$ simmetrico [risp. hermitiano]. Allora V ha base orto-normale di autovettori di f.

<u>dim</u>.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori distinti di f.
Basta dim. che f è diagonalizzabile: infatti f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $W = V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k}$ è tutto V. Se dimostriamo quindi che $W = V$, l'unione di basi ortonormali dei V_{λ_j} è una base ortonormale per V (perché $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$ per $i \neq j$).

esercizio

Ogni V_{λ_i} è f-invariante, quindi / W è f-invariante.
Per il teorema precedente $W^\perp$ è f-invariante. Allora

$f|_{W^\perp} : W^\perp \longrightarrow W^\perp$ sarebbe ancora operatore simmetrico

[hermitiano] (ovvio esercizio). Ne seguirebbe che $f|_{W^\perp}$
avrebbe un ulteriore autovalore $\lambda' \in \mathbb{R}$, con autovettore
$\underline{w}' \in W^\perp$, assurdo.

__Corollario__. f simmetrico (o hermitiano) $\Rightarrow$ f è diagonalizzabile. La decomposizione

$$V = V_{\lambda_1} \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}$$

è in autospazi a 2 a 2 ortogonali.

COROLLARIO. $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica [risp. $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitiana]. Allora A si diagonalizza tramite una matrice ortogonale [risp. unitaria]: $\exists\, O \in O_n$ (risp. $U \in U_n$) t.c.

$$O^{-1}AO = {}^tOAO = D \quad \text{diagonale reale}$$

[risp. $$U^{-1}AU = U^*AU = D \quad \text{diagonale reale}]$$

Viceversa, se A si diagonalizza tramite $O \in O_n$ [risp., tramite $U \in U_n$] in una matrice diagonale reale allora A è simmetrica [risp., A è hermitiana].

dim. Applichiamo il teorema a $f_A : \underline{x} \to A\underline{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ [risp: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$]. $\exists$ base ortonormale di autovettori $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n$.

Quindi (per la caratterizzazione delle matrici ortogonali e unitarie) $P = [\underline{x}_1 | \cdots | \underline{x}_n] \in O_n$ [risp. $\in U_n$]. Quindi

$$P^{-1}AP = {}^tPAP \ [\text{risp. } = {}^t\bar{P}AP] = D \text{ diagonale (reale)}$$

Viceversa, se $O^{-1}AO = {}^tOAO = D$ diagonale reale [risp. $U^{-1}AU = U^*AU = D$ diagonale reale] allora

$$A = OD\,{}^tO \Rightarrow {}^tA = O\,{}^tD\,{}^tO = OD\,{}^tO = A \Rightarrow A \text{ simmetrica}$$

[risp. $A = UDU^* \Rightarrow A^* = UD^*U^* = UDU^*$

perché $D^* = D$ essendo D diagonale reale]