Lezione del 25/11/2013

Abbiamo visto: se $f \in \mathcal{L}(V,W)$ e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è base di V, $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ è base di W allora si può associare ad f una matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ tale che, $\forall \underline{v} \in V$, il vettore $f(\underline{v})$ è l'unico vettore di W le cui coordinate, rispetto a $\mathcal{B}'$, si ottengono moltiplicando la matrice per le coordinate di $\underline{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$. In formula:

$$[f(\underline{v})]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)\,[\underline{v}]_{\mathcal{B}}. \qquad (*)$$

L'associazione: $f \longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$ è un <u>isomorfismo</u> tra

$$\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

poiché $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f+g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) + M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g)$; $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\alpha f) = \alpha\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

Sappiamo che se V, W, Z sono sp. vett. su $\mathbb{K}$, e se

$f: V \to W$, $g: W \to Z$ sono appl. lineari, allora

$g \circ f: V \to Z$ è lineare.

<u>Proposizione</u> (proprietà generali della composizione).

i) se T è sp. vett. su $\mathbb{K}$ e $h: Z \to T$ è lineare, allora

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$ [associatività: vale in generale anche per applicazioni non lineari]

ii) Se $f_1, f_2: V \to W$, allora $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$

iii) Se $g_1, g_2: W \to Z$ allora $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$

iv) Se $c \in \mathbb{K}$, $(cg) \circ f = c(g \circ f) = g \circ (cf)$.

<u>dim</u> esercizio di semplice uso delle definizioni.

$$h\circ(g\circ f)(\underline{v}) = h((g\circ f)(\underline{v})) =$$

$$= h(g(f(\underline{v})))$$

Sia in particolare $W = Z = V$, cioè

$$f : V \to V, \quad g : V \to V, \quad g \circ f : V \to V.$$

Quindi $\mathcal{L}(V) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}(V,V)$ è dotato di una seconda operazione (la composizione) che per la prop precedente lo rende un anello.

Identità: $id : V \to V \quad id(\underline{v}) = \underline{v} \quad \forall \underline{v} \in V.$

Le appl. lineari di uno spazio V in sé si dicono anche <u>endomorfismi</u> di V.

<u>**Def**</u>. Un endomorfismo $f : V \to V$ si dice <u>invertibile</u> se $\exists \ g : V \to V$ t.c. $g \circ f = f \circ g = id$. [si indica g con f^{-1}]

Caratterizziamo gli endomorfismi invertibili in $\mathcal{L}(V)$.

<u>PROPOSIZIONE</u>. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

(i) $f : V \to V$ è invertibile;

(ii) $f : V \to V$ è un isomorfismo;

(iii) $f : V \to V$ è iniettiva;

(iv) $f : V \to V$ è surgettiva

(v) $rg(f) = \dim V$.

$rg\, f = \dim(\operatorname{Im} f)$

<u>dim</u>. L'equivalenza tra (ii), (iii), (iv) è già stata dimostrata, mentre quella tra (iv) e (v) deriva subito dalla definizione di $rg(f)$.

Assumiamo che $g \circ f = id$. Allora f è necessariamente iniettiva

[<u>eser.</u>: se la composizione di due appl. (anche non lineari) è iniettiva, allora la prima delle due è iniettiva].

Questo dà (i) $\Rightarrow$ (iii) (e quindi anche (i) $\Rightarrow$ (ii)).

Viceversa, se $f: V \to V$ è isomorfismo, e $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \cdots, \underline{v}_n\}$ è base di V, allora $\underline{w}_1 = f(\underline{v}_1), \cdots, \underline{w}_n = f(\underline{v}_n)$ è ancora base di V [si è visto: f iniettiva manda vett. indip. in vett. indip.; siccome il loro numero è n, sono necessariamente base di V]. Definiamo allora $g: V \to V$ come l'unica applicazione lineare t.c. $g(\underline{w}_1) = \underline{v}_1, \cdots, g(\underline{w}_n) = \underline{v}_n$. Ne segue $g \circ f(\underline{v}_1) = g(\underline{w}_1) = \underline{v}_1, \cdots, g \circ f(\underline{v}_n) = g(\underline{w}_n) = \underline{v}_n$, quindi $g \circ f$ fissa la base $\mathcal{B}$ di V. Allora $g \circ f = id$. Inoltre, $f \circ g(\underline{w}_j) = f(\underline{v}_j) = \underline{w}_j$, quindi $f \circ g = id$ perché fissa la base $\underline{w}_1, \cdots, \underline{w}_n$. ■

Analogamente si dimostra:

Prop. (1) Sia $f: V \to W$ lineare. Allora $\exists\ g: W \to V$ t.c. $g \circ f = id_V$ (cioè f è "invertibile a sinistra") se e solo se f è iniettiva (in particolare deve essere $\dim V \leq \dim W$).

(2) $\exists\ g: W \to V$ t.c. $f \circ g = id_W$ (f è "invertibile a destra") se e solo se f è surgettiva (in particolare $\dim V \geq \dim W$).

---

dim (1) $\Rightarrow$ è l'eser. della pag. precedente. $\Leftarrow$. $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base di V; allora $f(\underline{v}_1) = \underline{w}_1, \dots f(\underline{v}_n) = \underline{w}_n$ sono lin. indip. Estendiamo a base di W: $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n, \underline{w}_{n+1}, \dots, \underline{w}_m$ e definiamo $g: W \to V$ t.c. $g(\underline{w}_j) = \underline{v}_j$, $j = 1, \dots, n$, e $g(\underline{w}_{n+1}), \dots, g(\underline{w}_m)$ in qualunque modo. Allora $g \circ f(\underline{v}_j) = \underline{v}_j$, $j = 1, \dots, n$, quindi $g \circ f = id_V$.

(2) $\Rightarrow$ è un fatto generale: se $g \circ f$ è surgettiva, allora g è surgettiva.

$\Leftarrow$ Sia $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ base di W. Scegliamo $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tali che $f(\underline{v}_1) = \underline{w}_1, \dots, f(\underline{v}_m) = \underline{w}_m$ e definiamo $g: W \to V$ come l'appl. lineare t.c. $g(\underline{w}_j) = \underline{v}_j$, $j = 1, \dots, m$. Allora $f \circ g(\underline{w}_j) = f(\underline{v}_j) = \underline{w}_j$, $j = 1, \dots, m$, quindi $f \circ g = id_W$.

<u>Corollario</u> $f: V \to W$ ha inversa (destra e sinistra) $g: W \to V \iff f$ è isomorfismo.

<u>nota</u>. Nel caso (1) ogni $\underline{w}_j$ con $j > \dim V$ si può mandare in un qualunque vett. di V, quindi gli inversi sinistri dipendono da
$(\dim W - \dim V) \cdot \dim V$ parametri.
Nel caso (2), i vettori $\underline{v}$ t.c. $f(\underline{v}) = \underline{w}_j$ dipendono da $\dim V - \dim W$ parametri, quindi gli inversi destri dipendono da
$(\dim V - \dim W) \cdot \dim W$ parametri.

Fissiamo ora basi $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ in V

$\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ in W

$\mathcal{B}'' = \{\underline{z}_1, \dots, \underline{z}_s\}$ in Z .

TEOREMA

Se $f \in \mathcal{L}(V, W)$, $g \in \mathcal{L}(W, Z)$ hanno matrici associate rispettivamente $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

allora la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f)$ associata alla composizione $g \circ f$ è il prodotto righe per colonne

$$\boxed{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)}$$

dim. La prima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f)$ è $[g(f(\underline{v}_1))]_{\mathcal{B}''}$.

Per la relazione fondamentale (*) di pagina 1, applicata a g, alla sua matrice associata e al vettore $f(\underline{v}_1)$, si ottiene:

$$[g(f(\underline{v}_1))]_{\mathcal{B}''} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g)\,[f(\underline{v}_1)]_{\mathcal{B}'}$$

Per costruzione $[f(\underline{v}_1)]_{\mathcal{B}'}$ è la prima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$

Allo stesso modo:

j-sima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f) = [g(f(\underline{v}_j))]_{\mathcal{B}''} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g)\,[f(\underline{v}_j)]_{\mathcal{B}'} =$

$= M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g) \cdot ($j-sima colonna di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f))$.

Questo dim. il teo.

Mol. riga x colonna

Schematicamente

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \quad V \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & & & \mathbb{K}^n \arrow[d, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)"'] \arrow[dr, "M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g\circ f)"] & \\
W \arrow[r, "g"'] & Z & \rightsquigarrow & \mathbb{K}^m \arrow[r, "M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(g)"'] & \mathbb{K}^s \\
\mathcal{B}' & \mathcal{B}'' & & &
\end{tikzcd}
$$

La formula si generalizza:

$$\underset{\mathcal{B}_1}{V_1} \xrightarrow{f_1} \underset{\mathcal{B}_2}{V_2} \xrightarrow{f_2} \cdots\cdots \xrightarrow{f_{K-1}} \underset{\mathcal{B}_K}{V_K}$$

Allora:

$$M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_K}(f_{K-1} \circ \cdots \circ f_1) = M^{\mathcal{B}_{K-1}}_{\mathcal{B}_K}(f_{K-1}) \cdots M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f_1)$$

$$\mathbb{K}^{n_1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n_2}$$

$$\underline{x} \longmapsto M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f_1)\,\underline{x} \longmapsto M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_3}(f_2)\,M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(f_1)\,\underline{x}$$

$$\longmapsto \cdots$$

<u>oss</u>. $id: V \longrightarrow V$. Se prendiamo la stessa base $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo, allora:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id) = I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

perché: ...

$$[id(\underline{v}_1) = \underline{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[id(\underline{v}_2) = \underline{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Corollario</u> Sia $f: V \to V$ invertibile, con inversa $f^{-1}: V \to V$. Se $\mathcal{B}$ è la base di V in partenza, $\mathcal{B}'$ la base di V in arrivo (possibilmente diverse) allora:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1})\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id) = \mathbf{I}$$

Quindi le due matrici

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}), \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

sono invertibili e si ha:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)\right]^{-1}$$

ricordiamo: data una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, una matrice B t.c. $AB = BA = I$, si dice matrice inversa di A e si indica con A^{-1}

Quindi $f: V \to V$ invertibile $\Rightarrow$ la matrice associata (risp. a basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ qualunque) è invertibile in $M_n(\mathbb{K})$.

E viceversa: se la matrice associata a f è invertibile in $M_n(\mathbb{K})$, allora f è invertibile in $L(V)$ [esercizio!]

In particolare, se $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \left[M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\right]^{-1}$$

<u>oss</u>. Applichiamo la formula del cor. preced. al caso

$$id : V \longrightarrow V$$

Chiaramente $id^{-1} = id$, quindi si ha:

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id)\ M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id) = I$$