Lezione del 24/10/2013

Abbiamo visto: ogni sp. vett V ha una base, e due basi sono costituite dallo stesso numero di vettori.

DEFINIZIONE. Si dice DIMENSIONE dello spazio vettoriale V il **numero di vettori** di una (qualunque) base.

La dimensione di V si indica con $\dim(V)$.

<u>es</u> 1. $\mathbb{K}^n$ ha dimensione n

2. $M_n(\mathbb{K})$ ha dim n^2; più generalmente $M_{m,n}(\mathbb{K})$ ha dim. mn.

3. $\mathbb{K}_n[x]$ ha dim $n+1$.

TEO. 1 - DA OGNI INSIEME DI GENERATORI SI PUÒ ESTRARRE UNA BASE

TEO. 2. OGNI INSIEME INDIPENDENTE È CONTENUTO IN UNA BASE

---

1 lo abbiamo visto quando si è dimostrata l'esistenza di una base in uno spazio V finitamente generato.

2 si dimostra così: sia I indipendente; sia $\mathcal{B}$ una base di V (abbiamo dim. che ne esistono). Applichiamo l'algoritmo di scambio a $\mathcal{B}$ e ad I. Allora $\exists\ J \subset \mathcal{B}$, $\# J = \# I$ t.c. $(\mathcal{B} \setminus J) \cup I$ è base.

__esempio__ Siano: $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Sono linearmente indipendenti

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 = 0 \\ -2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Prendiamo base, es. base canonica: $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha:

$\underline{v}_1 = \underline{e}_1 - \underline{e}_2$, quindi posso scambiare

$\underline{e}_1$ con $\underline{v}_1$: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \rightsquigarrow \underline{v}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$, ancora base.

risolviamo: $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha \underline{v}_1 + \beta \underline{e}_2 + \gamma \underline{e}_3 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ \gamma = -2 \end{cases}$$ $\beta = 3$. Scambio $\underline{e}_2$ con $\underline{v}_2$:

$\underline{v}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \longrightarrow \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_3$ che è base.

Quindi abbiamo trovato base che contiene $\underline{v}_1, \underline{v}_2$.

---

esercizi 1. Dire se $f_1 = x^2 - 2x$, $f_2 = x + 3$, si possono estendere a una base in $\mathbb{R}_2[x]$ e in $\mathbb{R}_3[x]$, ed eventualmente trovarne una.

2. In $\mathbb{R}^3$, dimostrare che $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Determinare una base di W ed estenderla ad una base di $\mathbb{R}^3$.

PROPOSIZIONE. Sia V sp. vett. di dim n. Se $W \subset V$ è sottospazio vettoriale, allora $\dim W \leq \dim V$, e l'uguaglianza vale se e solo se $W = V$.

[in altri termini: un sottospazio proprio $W \subset V$ (proprio = strettamente contenuto) ha dimensione inferiore a quella di V] -

---

dim. Basta osservare: se $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k \in W$ sono linearmente indipendenti in W, allora lo sono in V (è ovvio: dimostrare per esercizio!). Quindi se $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ è base di W, allora i $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$ sono lin. indip. in V e quindi (per il teorema 2 sopra) $\mathcal{B}'$ è contenuto in una base $\mathcal{B}$ di V, che ha n elementi. Quindi $k \leq n$. Se $k = n$, chiaramente $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, quindi $W = V$ -

[↑ esercizio!]

PROPOSIZIONE SIA V SP. VETT. DI DIM. n.

1) SE $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, ALLORA $k \leq n$.

[A LIN. INDIP. $\Rightarrow \# A \leq n$]

2) OGNI SISTEMA DI $n+1$ (O PIÙ) VETTORI È LINEARMENTE DIPENDENTE.

[$\# A > n \Rightarrow A$ LIN. DIPEN.]

3) OGNI SISTEMA DI n vettori LINEARMENTE INDIPENDENTE È BASE

[$\# A = n$, A LIN. INDIP. $\Rightarrow A$ BASE]

4) SE $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ GENERANO V, ALLORA $k \geq n$.

[$\mathrm{Span}(A) = V \implies \# A \geq n$.]

5) $n-1$ (O MENO) VETTORI NON GENERANO V.

[$\# A < n \implies \mathrm{Span}(A) \subsetneq V$]

6) OGNI SISTEMA DI n VETTORI CHE GENERANO V È UNA BASE DI V.

[$\mathrm{Span}(A) = V$, $\# A = n \implies A$ BASE DI V]

DIM.

1) Per il teorema 2, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ si estendono a base di V -

2) Se fosse indipendente, sarebbe contenuto in una base -

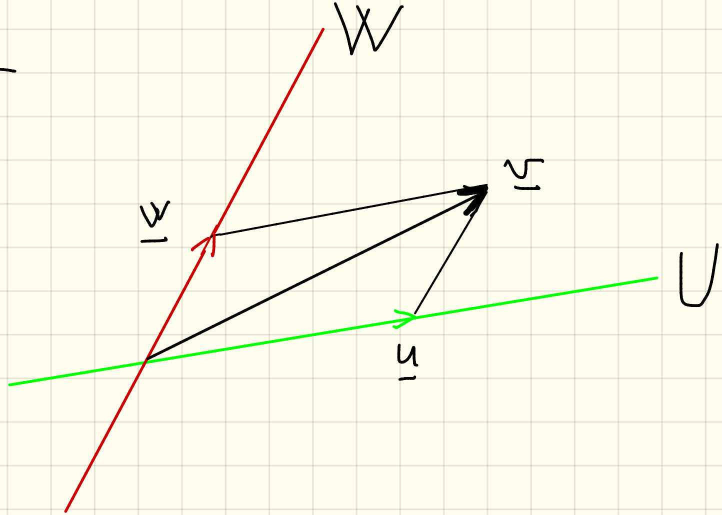
3) È contenuto in una base, e quindi coincide con essa -

4) Per il teorema 1, da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ si può estrarre una base di V -

5) Altrimenti, conterrebbero una base -

6) Contiene una base, e quindi coincide con essa -

DECOMPOSIZIONE DI UN VETTORE $\underline{v}$ LUNGO 2 (O PIÙ) "DIREZIONI" –



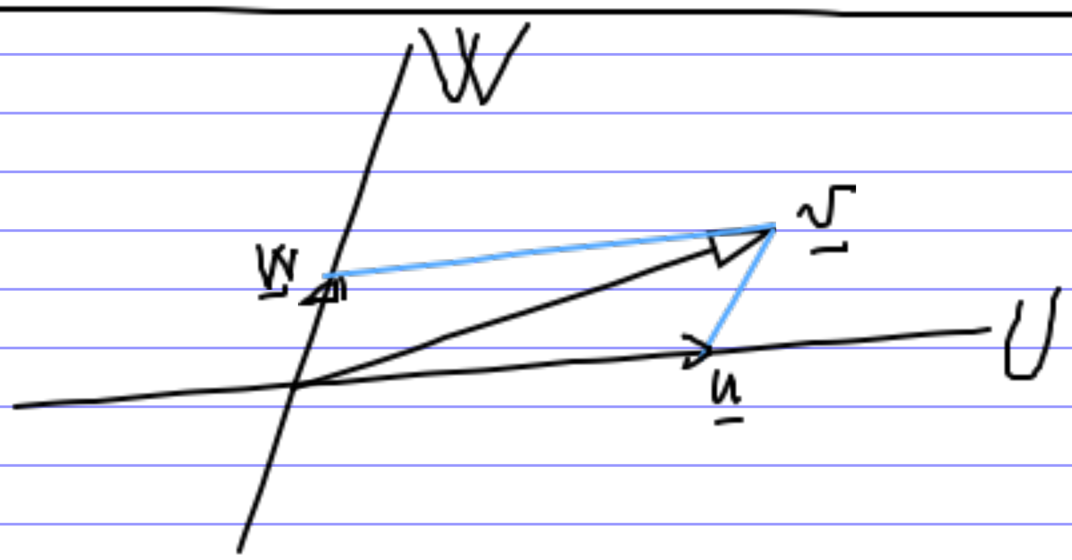
$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$\underline{u} \in U$

$\underline{w} \in W$

<u>esempi</u>.

1. Decomposizione di un vettore lungo 2 "direzioni".

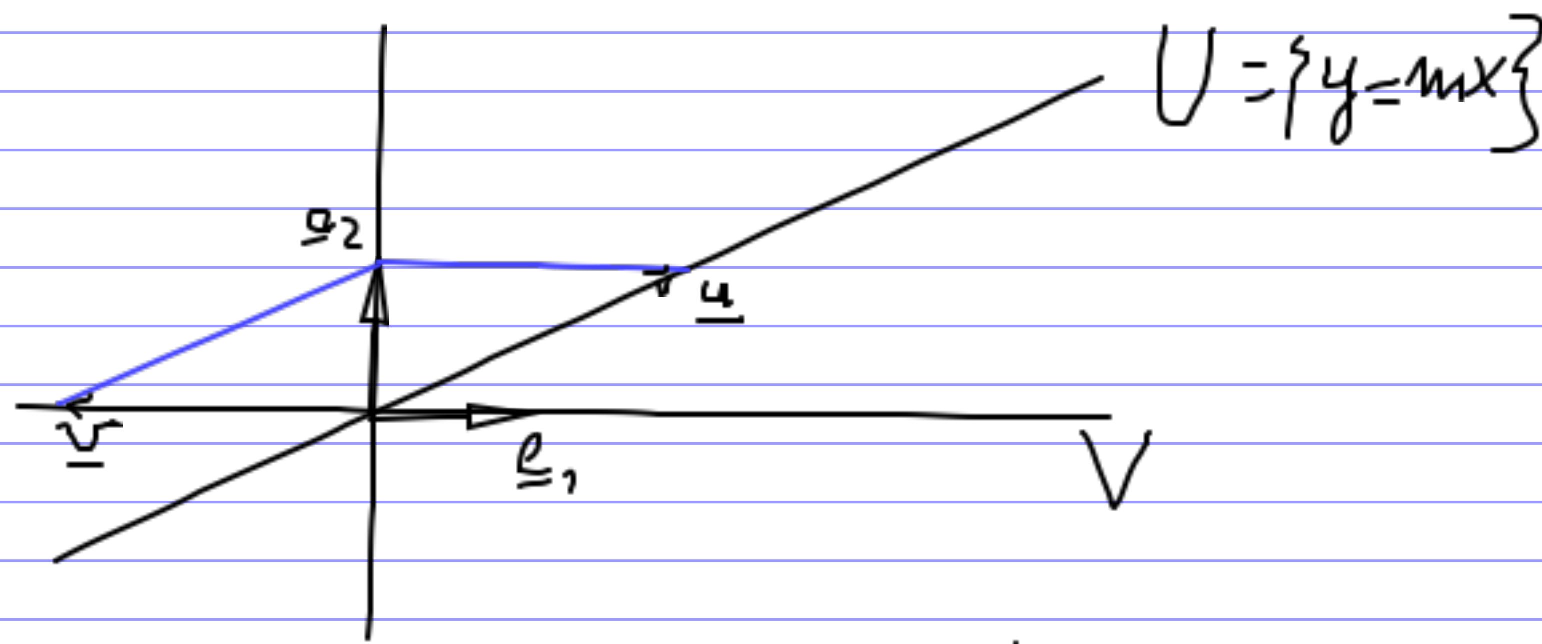


$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$\underline{u} \in U$

$\underline{w} \in W$

<u>esempi</u> In $\mathbb{R}^2$, si dice se è possibile decomporre, al variare di $m \in \mathbb{R}$, il vettore $\underline{e}_2 = (0,1)$ secondo le direzioni della retta $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$ e dalla retta V passante per l'origine e avente la direzione del vettore $\underline{e}_1 = (1,0)$



$\underline{e}_2 = \underline{u} + \underline{v}$ $\qquad$ $\underline{u} \in U$, $\underline{v} \in V$

$U = \text{Span}(\{(1,m)\})$ $\qquad$ quindi è risolubile?

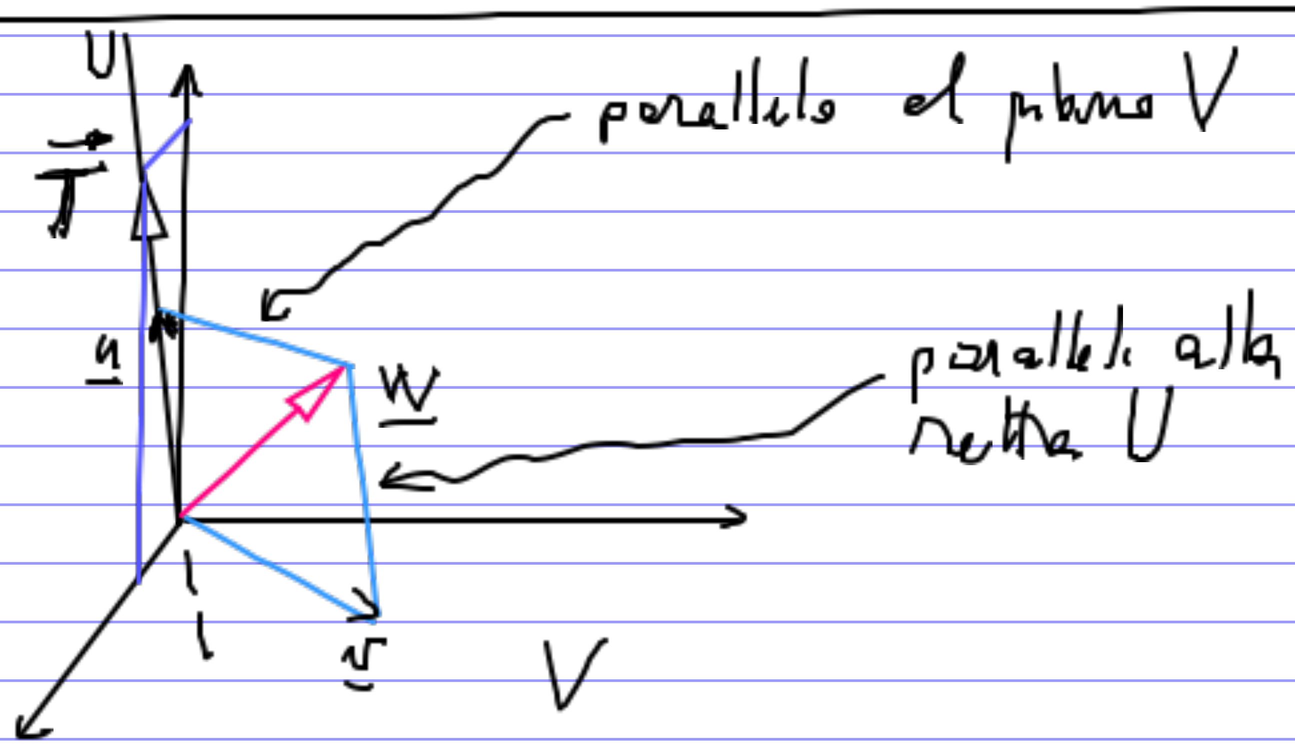
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 1 = m\alpha \end{cases} \qquad \text{Se } m \neq 0, \quad \alpha = \frac{1}{m}, \quad \beta = -\frac{1}{m}$$

$$\underline{e}_2 = \frac{1}{m}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix} + \beta\, \underline{e}_1$$

Se $m = 0$, nessuna soluzione
[$U = V$ se $m = 0$]

<u>es 2</u>. $U = \mathrm{Span}(\vec{T})$, $\vec{T} = (3, 0, 50)$,
$V = \{z = 0\}$.
Si decomponga un generico vettore $\underline{w} \in \mathbb{R}^3$ secondo le direzioni di U e V



$$\underline{w} = \begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}3\\0\\50\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mu\\\nu\\0\end{bmatrix}$$ è risolubile?

$$\begin{cases} w_1 = 3\alpha + \mu \end{cases} \qquad \mu = w_1 - \frac{3}{}\, w_3$$

$$\begin{cases} w_2 = \nu & \nu = w_2 \\ w_3 = 50\alpha & \alpha = w_3/50 \end{cases}$$

$\underline{\text{oss}}$ $V = \mathrm{Span}(\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\})$: $\begin{bmatrix} \mu \\ \nu \\ 0 \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ base di V,

$\vec{T}$ base di U.

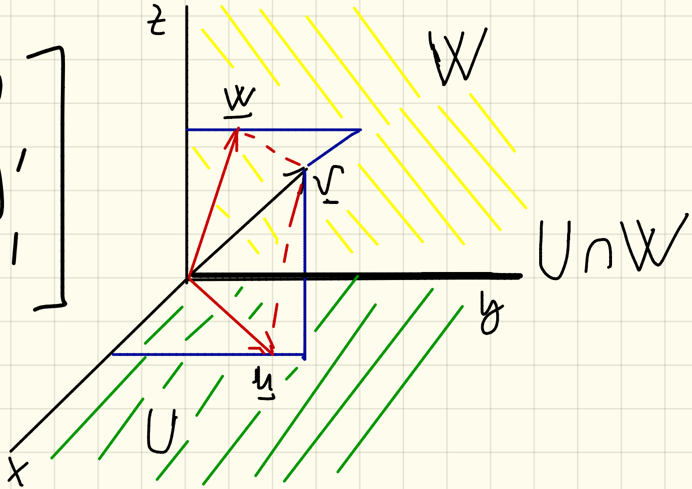
$$\underline{w} = \underset{\underset{U}{\Uparrow}}{\alpha \vec{T}} + \underset{\underset{V}{\Uparrow}}{(\mu \underline{e}_1 + \nu \underline{e}_2)}$$

es.: in $\mathbb{R}^3$, sia $U = \{z=0\}$, $W = \{x=0\}$. Il vettore $\underline{v} = (1,1,1)$ si decompone come

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{u} + \underline{w} \quad , \underline{u} \in U, \underline{w} \in W, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

quindi la decomposizione <u>non è unica</u>.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$



Si noti che $U \cap W = \{x = z = 0\}$ = asse y ;

È chiaro che se $U \cap W$ contiene un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$

la decomposizione dei vettori lungo U e W non è unica :

$$\begin{cases} \underline{v} = \underline{u} + \underline{0} \ , & \underline{u} = \underline{v} \ , \\ \underline{v} = \underline{0} + \underline{w} \ , & \underline{w} = \underline{v} \end{cases}$$ e anche

---

$$\underline{t} = \underline{u} + \underline{w} = \underbrace{(\underline{u} + \underline{v})}_{U} + \underbrace{(\underline{w} - \underline{v})}_{W}$$

"OPERAZIONI" TRA SOTTOSPAZI

SIANO U, W SOTTOSPAZI VETT. DI V. Allora:

i) $U \cap W$ è sottosp. vett. di V. [esercizio]

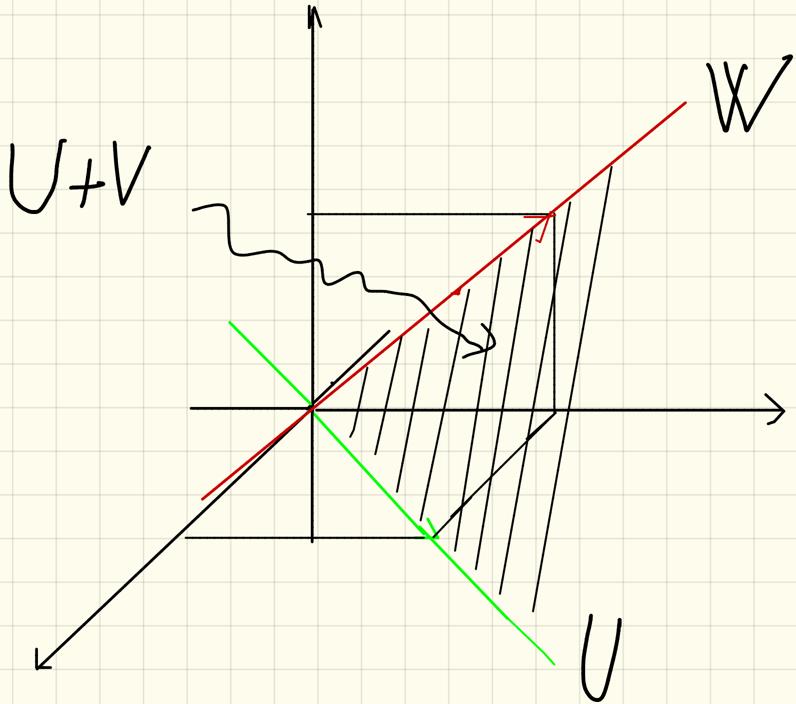
ii) $U \cup W$ è sottosp. vett. di V $\Leftrightarrow$ uno dei due è contenuto nell'altro ($U \subset W$ oppure $W \subset U$) [esercizio]

DEF SIA $U+W = \{\underline{u}+\underline{w} \mid \underline{u} \in U, \underline{w} \in W\}$

$= \{\underline{v} \in V \mid \exists\, \underline{u} \in U, \underline{w} \in W \text{ t.c. } \underline{v} = \underline{u}+\underline{w}\}$.

$\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \cap W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 \in U \cap W$

es: $U = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$



Osserv. $U+W$ è un sottospazio vett. di V, il più piccolo che contiene sia U che W (quindi $U \cup W$).

Si ha: $$U+W = \mathrm{Span}(U \cup W)$$

Esercizio. A sottoinsieme di V sp. vett. Allora $\mathrm{Span}(A)$ è il più piccolo sottosp. vett. di V che contiene A.

$$\begin{array}{l} \underline{v}_1 = \underline{u}_1 + \underline{w}_1 \\ \underline{v}_2 = \underline{u}_2 + \underline{w}_2 \end{array} \Longrightarrow \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = \underbrace{(\underline{u}_1 + \underline{u}_2)}_{U} + \underbrace{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)}_{W}$$

Inoltre se $\underline{v} \in U+W$, e $\alpha \in \mathbb{K}$, allora $\exists\ \underline{u} \in U, \underline{w} \in W$ tali che $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$. Quindi $\alpha\underline{v} = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{w}$. Ma $\alpha\underline{u} \in U$ perchè U è sottosp. vett., $\alpha\underline{w} \in W$ perchè W è sottosp. vett., quindi $\alpha\underline{v} \in U+W$.

Sia ora Z sottosp. vett. che contiene U e W. Allora Z contiene tutte le comb. lin. di sistemi di vettori presi da U e da W. In particolare Z contiene tutte le comb. lineari del tipo $\underline{u} + \underline{w}$, $\underline{u} \in U, \underline{w} \in W$, cioè $Z \supset U+W$. $\_$

DEF. IL SOTTOSPAZIO Z DI V SI DICE

SOMMA DIRETTA

DEI DUE SOTTOSPAZI U E W SE

(i) $Z = U + W$

(ii) $U \cap W = \{\underline{0}\}$

SI SCRIVE $Z = U \oplus W$

<u>TEO.</u> SE $Z = U \oplus W$, $\forall\ \underline{v} \in Z$, $\exists$ <u>UNICI</u> $\underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$ T.C.

$\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

<u>DIM</u> SE $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w} = \underline{u}' + \underline{w}'$, $\underline{u}, \underline{u}' \in U$, $\underline{w}, \underline{w}' \in W$, ALLORA

IL VETTORE $\quad \underline{x} = \underbrace{\underline{u}-\underline{u}'}_{\substack{\cap \\ U}} = \underbrace{\underline{w}'-\underline{w}}_{\substack{\cap \\ W}} \in U \cap W$

QUINDI $\quad \underline{x} = \underline{0}$, CIOÈ $\quad \underline{u} = \underline{u}'$, $\underline{w} = \underline{w}'$.

Quindi la condizione di essere in somma diretta è la condizione che garantisce un'unica decomposizione di un vettore $\underline{v} \in U+W$ lungo le direzioni U e W.

Osservazioni

1) Sia $A = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ un sistema di vettori linear. indipendenti di V (ad es. una base) e sia

$$A = A' \cup A''$$

una partizione in due parti disgiunte $[A' \cap A'' = \emptyset]$

$$A' = \{\underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_k}\}, \quad A'' = \{\underline{v}_{i_{k+1}}, \dots, \underline{v}_{i_n}\}$$

Allora $\quad \text{Span } A = \text{Span } A' \oplus \text{Span } A''$

Infatti: $\overset{\text{intersezione}}{\overset{\in}{\underline{x}}} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \underline{v}_{i_j} = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \underline{v}_{i_j} \Longrightarrow$

$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \underline{v}_j - \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \underline{v}_{i_j} = \underline{0} \Longrightarrow$ TUTTI GLI $\alpha_j = 0$.

2) Viceversa, se $V = U \oplus W$, e $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_h\}$ è base di U, $\mathcal{B}'' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h\}$ base di W, allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ è base per V [dimostrazione

In particolare:

$$\boxed{\dim U \oplus W = \dim U + \dim W}$$

<u>Esempio</u>. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M \}$.

$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M \}$

allora $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

devo dimostrare che

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_K, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h$ sono lin. indipendenti.

Se :

$$\sum_{i=1}^{K} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j = \underline{0}$$

allora:

$$\underline{x} = \underbrace{\sum_{i=1}^{K} \alpha_i \underline{v}_i}_{\in U} = \underbrace{-\sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j}_{\in W} \implies \underline{x} \in U \cap W = \{\underline{0}\} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}.$$

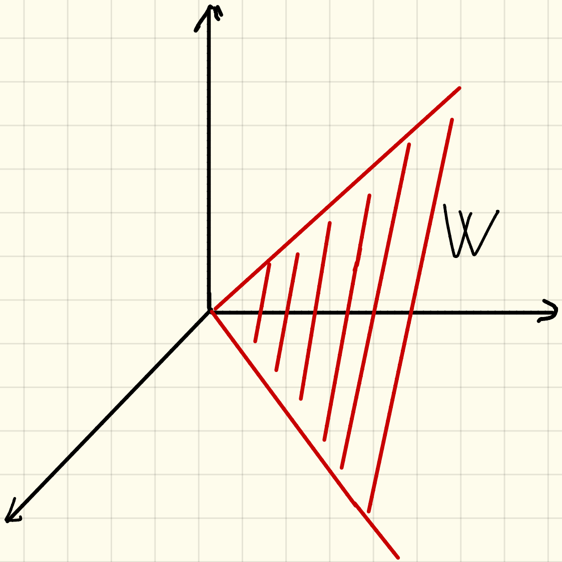
Allora per l'indipendenza lineare dei $\underline{v}_i$ si deduce che $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, K$,
e per quella dei $\underline{w}_j$ si deduce $\beta_j = 0, j = 1, \dots, h$.

Il fatto che $\mathcal{B}$ generi V è ovvio

[Fare ora l'es. 1 alla fine della lezione: se A genera U e B genera W, allora $A \cup B$ genera $U+W$] $\_\_$

2) Sia $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$ (piano per l'origine)

Trovare tutti i sottospazi U t.c. $U \oplus W = \mathbb{R}^3$



DEF. SE $V = U \oplus W$ ALLORA U SI DICE "COMPLEMENTARE" DI W (e W COMPLEMENTARE DI U).

<u>es.</u>

dim. che $\dim W = 2$, trovandone base.

dim. che ogni complementare U di W è della forma $U = \mathrm{Span}(\{\underline{u}\})$, con $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vettore t.c. $\underline{u} \notin W$, cioè $u_1 - u_2 + u_3 \neq 0$.

In generale:

TEOREMA [FORMULA DI GRASSMAN] Se U, W sono sottospazi vett. di V, si ha:

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)}$$

---

dim Siano $n = \dim(U+W)$, $m = \dim U$, $p = \dim W$, $q = \dim(U \cap W)$. La formula da dimostrare è: $n = m + p - q$.

Prendiamo $\mathcal{B}_1 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q\}$ base di $U \cap W$. Siccome $U \cap W$ è sottosp. vett. di U, possiamo estendere $\mathcal{B}_1$ a base $\mathcal{B}_2 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q, \underline{v}'_{q+1}, \dots, \underline{v}'_m\}$ di U aggiungendo $m-q$ vettori $\underline{v}'_{q+1}, \dots, \underline{v}'_m$. Allo stesso modo $U \cap W$ è sottosp. vett. di W, quindi estendiamo $\mathcal{B}_1$ a base $\mathcal{B}_3 = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q, \underline{v}''_{q+1}, \dots, \underline{v}''_p \}$ di W aggiungendo $p-q$ vettori $\underline{v}''_{q+1}, \dots, \underline{v}''_p$. Per concludere basta dimostrare la seguente

<u>Asserzione</u>: gli $m+p-q$ vettori

$$\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q, \underline{v}'_{q+1}, \dots, \underline{v}'_m, \underline{v}''_{q+1}, \dots, \underline{v}''_p \}$$

sono una base di $U+W$.

[e quindi $\dim(U+W) = m+p-q$, che è la tesi del teorema]

Sono indipendenti: se $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{j=q+1}^{m} \alpha'_j \underline{v}'_j + \sum_{k=q+1}^{p} \alpha''_k \underline{v}''_k = \underline{0}$

allora: $\underbrace{\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{j=q+1}^{m} \alpha'_j \underline{v}'_j}_{\in U} = \underbrace{-\sum_{k=q+1}^{p} \alpha''_k \underline{v}''_k}_{\in W} = \underline{x}$

$\Longrightarrow \quad \underline{x} \in U \cap W \quad \Longrightarrow \quad \underline{x} \in \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_q\}$

quindi $\alpha'_{q+1} = \dots = \alpha'_m = 0$ perché l'espressione di $\underline{x}$ in termini della base di U è unica.

Allora la relazione in prima riga della pagina precedente diventa:

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \underline{v}_i + \sum_{k=q+1}^{p} \alpha''_k \underline{v}''_k = \underline{0}$$

e allora anche tutti gli α_i, $i=1,\dots,q$, e gli α''_k, $k=q+1,\dots,p$, sono nulli perchè $\mathcal{B}_3$ è base di W.

<u>Generano $U+W$</u>: (ovvio:) se $\underline{v} \in U+W$, $\underline{v}$ si scrive come $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ per certi $\underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$; ma $\underline{u}$ si esprime come comb. lineare di $\mathcal{B}_2$ e $\underline{w}$ come comb. lin. di $\mathcal{B}_3$, quindi $\underline{v}$ si esprime come comb. lineare di $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ [esercizio; vedi anche l'eser. 1 seguente]

<u>Esercizi</u> 1. A, B sottoinsiemi di V. Allora:

$$\mathrm{Span}(A \cup B) = \mathrm{Span}(A) + \mathrm{Span}(B)$$

2. Due piani per l'origine di $\mathbb{R}^3$ o coincidono oppure si intersecano in una retta (passante per l'origine)

3. Siano $\mathcal{T}^+ = \{M = (m_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid m_{ij} = 0 \text{ se } i > j\}$

e

$$\mathcal{T}^- = \{M = (m_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid m_{ij} = 0 \text{ se } i < j\}$$

le matrici triangolari superiori e quelle inferiori rispettivamente.

Allora

(i) $\mathcal{T}^+$ e $\mathcal{T}^-$ sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, della stessa dimensione.

(ii) $\mathcal{T}^+ \cap \mathcal{T}^- = \mathcal{D} = \{M = (m_{ij}) \mid m_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$

[quindi $\mathcal{D}$ sono le matrici diagonali]

(iii) Si ha: $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^-$

(iv) Calcolare le dimensioni.

$$\dim \mathcal{D} = n, \qquad \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$$

Per formule di Grassman:

$$n^2 = \dim \mathcal{T}^+ + \dim \mathcal{T}^- - n$$

$$= 2 \dim \mathcal{T}^+ - n \implies$$

$$\dim \mathcal{T}^+ = \frac{n^2+n}{2}$$

[verificarlo direttamente]