Lezione del 17/10/2013

$\boxed{\text{BASE}}$: insieme (ordinato) $\mathcal{B} \subset V$

di GENERATORI $\iff \mathrm{Span}(\mathcal{B}) = V \iff$ ogni $\underline{v} \in V$ si sviluppa come combinazione lineare finita di elementi di V

e LINEARMENTE INDIPENDENTE $\iff$ dati comunque $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathcal{B}$ l'unica soluzione di

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

è la soluzione nulla $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n \equiv 0$

Torniamo sull'esempio $V = \mathbb{K}[x] = \{\text{polinomi a coeff. in } \mathbb{K}\}$

si è visto che non può avere base finita: $\nexists\ A \subset V$, A finito, tale che $\mathrm{Span}(A) = V$ [in altre parole: non esiste un insieme finito di generatori di V]

una base: $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$.

Invece: $V = \mathbb{K}_n[x] = \{\text{polinomi di grado} \leq n\}$ ha base finita

$$\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$$

Altro esempio.

eser. 1 - $V = \{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \}$ non ha base finita

Basta dimostrare che V non può essere generato da un sottoinsieme finito di funzioni. [si potrebbe vedere che una base ha "cardinalità" non numerabile]

eser. 2 - $V = \{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{F}_2 \}$ dove $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ è il campo con 2 elementi, Anche questo V non può avere base finita

[anche qui si potrebbe dimostrare che V ha una base non numerabile]

eser. 3 - $V = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists\, K \in \mathbb{N}$ t.c. $f(n) = 0$ per $n > K \}$

[sono le successioni "definitivamente" nulle] Dimostrare che ha base infinita (ma numerabile)

Invece $V = \{ f : \{1, \cdots, n\} \to \mathbb{R} \}$ ha un insieme finito di generatori:

Siano F_1 definita da $\begin{cases} F_1(1) = 1 \\ F_1(j) = 0 & \text{se } j = 2, \cdots, n \end{cases}$

F_2 definita da $\begin{cases} F_2(j) = 1 & \text{se } j = 2 \\ F_2(j) = 0 & \text{se } j \neq 2 \end{cases}$

e così via.

$$\begin{cases} F_k(j) = 1 & \text{se } k = j \\ F_k(j) = 0 & \text{se } k \neq j \end{cases} \quad \text{e} \quad (k = 1, \cdots, n)$$

Data una qualunque $f:\{1,\cdots,n\}\longrightarrow\mathbb{R}$ si ha l'uguaglianza:

$$f = f(1)\,f_1+\cdots+f(n)\,f_n$$

es. con $n=3$:

se $f(1)=5$, $f(2)=-\sqrt{2}$, $f(3)=\pi$, allora $f=5\,f_1-\sqrt{2}\,f_2+\pi\,f_3$

[Verificare che i 2 membri valgono la stessa quantità quando calcolati sullo stesso numero]

$f_1,\cdots,f_n$ sono anche lin. indipendenti, e quindi sono una base:

se vale $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n = e$ [dove $e(j)=0$, $j=1,\cdots,n$]

per qualche $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, valutando ad es. nel punto 1:

$$\alpha_1 f_1(1) + \alpha_2 f_2(1) + \cdots + \alpha_n f_n(1) = e(1) = 0,$$

e si ha $f_1(1) = 1$, $f_2(1) = 0, \cdots, f_n(1) = 0$ per definizione, da cui

$$\alpha_1 = 0$$

Similmente si ottiene $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ valutando successivamente in $2, 3, \cdots, n$.

Quindi $f_1, \cdots, f_n$ formano una base

Si ha:

Teorema

$\boxed{\text{OGNI SPAZIO VETTORIALE HA UNA BASE.}}$

<u>Lemma</u> $A \subset V$ è INDIPENDENTE MASSIMALE [CIOÈ: se $A \subset B$, $A \neq B$, $\Rightarrow$ B è DIPENDENTE]

$\Longleftrightarrow$ A È BASE.

<u>dim</u> $\Rightarrow$ DEVO DIM. CHE $\mathrm{Span}(A) = V$. Sia $\underline{v} \in V$, devo dimostrare che $\underline{v} \in \mathrm{Span}(A)$.

Se $\underline{v} \in A$, ovvio. Supponiamo $\underline{v} \notin A$.

$B = A \cup \{\underline{v}\} \supset A$ $\Rightarrow$ B è DIPENDENTE

cioè $\exists$ $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in B$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, non tutti $= 0$, t.c.

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

uno dei $\underline{v}_i$ deve essere $= \underline{v}$, altrimenti A sarebbe dipendente

es.: $\underline{v}_n = \underline{v}$ $\qquad \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_{n-1} \underline{v}_{n-1} + \alpha_n \underline{v} = \underline{0}$, e $\alpha_n \neq 0$

allora: $\underline{v} = -\alpha_1/\alpha_n \, \underline{v}_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \underline{v}_{n-1}$

quindi: $\underline{v} \in \mathrm{Span}(A)$

$\Leftarrow$ A base. Devo dim che se $B \supset A$, $B \neq A$, allora B è DIPENDENTE. Prendiamo $\underline{v} \in B \setminus A$; A è base e quindi genera V, e allora $\exists$ comb. lin. di vett. di A che dà $\underline{v}$

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_h \underline{v}_h$, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in A$, da cui:

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_h \underline{v}_h - \underline{v} = \underline{0}$$

<u>Lemma</u>: $A \subset V$ UN INSIEME DI GENERATORI MINIMALE $\Longleftrightarrow$ A È BASE

---

cioè se $B \subset A$, $B \neq A$, $\mathrm{Span}(B) \subsetneq V$

Dim $\Rightarrow$ Devo dimostrare che A è linearmente indipendente. Osserviamo:

Lemma. Se $\underline{v} \in A$ è comb. lin. di altri vettori di A, allora

$$\mathrm{Span}\, A = \mathrm{Span}(A \setminus \{\underline{v}\})$$

[cioè rimuovendo $\underline{v}$ lo spazio generato rimane lo stesso]

dim lemma Per ipotesi $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$, per certi vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in A$, con $\underline{v} \neq \underline{v}_1, \dots, \underline{v} \neq \underline{v}_n$. Allora in una combinazione lineare di vettori di A che contenga $\underline{v}$, posso sostituire $\underline{v}$ con $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$, e questo mostra che $\mathrm{Span}\, A \subset \mathrm{Span}(A \setminus \{\underline{v}\})$.

L'altra parte ($\mathrm{Span}\, A \supset \mathrm{Span}(A \setminus \{\underline{v}\})$) è ovvia $\blacksquare$

Se fosse $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$ per qualche $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in A$ e, ad es., $\alpha_n \neq 0$, potrei ricavare $\underline{v}_n$ da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$. Allora per il lemma $\mathrm{Span}(A \setminus \{\underline{v}_n\}) = \mathrm{Span}\, A = V$, contro la minimalità di A.

$\Longleftarrow$ Sia A base. Se A contenesse un sottoinsieme B di generatori, $B \subsetneq A$, potrei esprimere $\underline{v} \in A \setminus B$ come comb. lin. di vettori di B: $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in B$.

Allora $\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n - \underline{v} = \underline{0}$ darebbe una relazione lineare non banale tra vettori di A, contro l'ipotesi che A è indipendente $\blacksquare$

TRATTEREMO SOLO SPAZI VETTORIALI CHE SONO GENERATI DA UN SOTTOINSIEME FINITO DI VETTORI.

un tale V si dice **FINITAMENTE GENERATO**

in altri termini: $\exists\ A \subset V$ finito t.c. $\text{SPAN}(A) = V$

o anche: $\exists$ un sistema finito di vettori

$$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$$

tale che ogni $\underline{v} \in V$ è combinazione lineare dei

$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$:

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n$ per certi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

DIMOSTRAZIONE NEL CASO FINIT. GENERATO -

Per ipotesi $\exists\ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ t.c. $\operatorname{Span}(\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}) = V$

Caso banale: $V = \{\underline{0}\}$ - si prende per convenzione $\mathcal{B} = \emptyset$

---

in $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ consideriamo la famiglia dei sottoinsiemi indipendenti. Prendiamone uno massimale, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$.
Dico che $\mathcal{B}$ è base. Prendiamo $\underline{v}_{n+1}$: dico che $\underline{v}_{n+1} \in \operatorname{Span}(\mathcal{B})$
come segue: $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}\}$ è dipendente:

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_k \underline{v}_k + \alpha_{k+1} \cdot \underline{v}_{k+1} = 0 \quad \text{con } \alpha_{k+1} \neq 0 \implies \text{ricavo}$$

$\underline{v}_{k+1}$ dai $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$. Similmente $\underline{v}_{k+2}, \dots, \underline{v}_n$

$\in \operatorname{Span} \mathcal{B} \implies \operatorname{Span} \mathcal{B} \supset \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

$\implies \operatorname{Span} \mathcal{B} = V = \operatorname{Span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

<u>esercizio</u>.

se $A \supset B \implies \operatorname{Span} A \supset \operatorname{Span} B$

<u>esercizio</u> $\operatorname{Span}(\operatorname{Span} A) = \operatorname{Span} A$

[o anche: se $W \subset V$ è sottosp. vett. $\implies$
$\operatorname{Span} W = W$]

Si è in realtà dimostrato di più:

<u>COROLLARIO</u>. DA OGNI INSIEME FINITO A DI GENERATORI SI PUÒ ESTRARRE UNA BASE. [VALE ANCHE SE L'INSIEME È INFINITO]

Infatti, si prende un insieme indipendente massimale $\mathcal{B} \subset A$.

<u>Teorema</u> V fin. gener. Due basi di V, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ hanno lo stesso numero di elementi $[\, m = n \,]$

<u>Lemma</u> [algoritmo di scambio]. Sia $A = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ lin. indip.
Sia $\underline{w} \in \mathrm{Span}\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ $\underline{w} = \alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_k \underline{u}_k$; con $\alpha_k \neq 0$
Allora $A' = (A \setminus \{\underline{u}_k\}) \cup \{\underline{w}\} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{k-1}, \underline{w}\}$
è lin. indipen. e $\mathrm{Span}\, A' = \mathrm{Span}\, A$

<u>dim lemma</u>. Sia $\beta_1 \underline{u}_1 + \dots + \beta_{k-1} \underline{u}_{k-1} + \beta_k \underline{w} = \underline{0}$

devo dim. che $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$

$\beta_1 \underline{u}_1 + \dots + \beta_{k-1} \underline{u}_{k-1} + \beta_k (\alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_{k-1} \underline{u}_{k-1} + \alpha_k \underline{u}_k) = \underline{0}$
$(\beta_1 + \beta_k \alpha_1) \underline{u}_1 + \quad + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) \underline{u}_{k-1} + \beta_k \alpha_k \underline{u}_k = \underline{0}$

Siccome i $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ sono lin. ind. $\Longrightarrow$ tutti i coeff. devono essere nulli, in particolare $\beta_k \alpha_n = 0$. Stiamo supponendo $\alpha_k \neq 0$ e quindi $\beta_k = 0 \Longrightarrow$

$$\beta_1 \underline{u}_1 + \dots + \beta_{k-1} \underline{u}_{k-1} = \underline{0} \Longrightarrow$$

anche $\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = 0$

Manca di dim $\operatorname{Span}\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\} = \operatorname{Span}\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{n-1}, \underline{w}\}$

$\underline{w} \in \operatorname{Span} A$, $A' = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{k-1}, \underline{w}\} \subset \operatorname{Span} A \Longrightarrow \operatorname{Span} A' \subset \operatorname{Span}(A)$

Viceversa, "tornando indietro" $\operatorname{Span} A \subset \operatorname{Span} A'$

Lemma (in generale). $A = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ lin. indip., $B = \{\underline{w}_1, \dots, w_t\}$ lin. indip. $B \subset \text{Span}(A)$. Allora si trova $B' \subseteq A$, con $\# B' = \# B$ (hanno lo stesso numero di elementi), tale che

$$A' = (A \setminus B') \cup B$$

è ancora lin. indipendente e $\text{Span}(A') = \text{Span}(A)$.

(dim lemma generale). Applico lemma precedente a $\underline{w} = \underline{w}_1$

Scambio $\underline{w}$ con un vettore di A, sia $\underline{u}_1$

$\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_K\} \rightsquigarrow \{\underline{w}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_K\}$.

Scambio $\underline{w}_2$: $\underline{w}_2 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \dots + \alpha_K \underline{u}_K$

se fosse $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ avrei $\underline{w}_2 = \alpha_1 \underline{w}_1$ che sarebbero dipendenti contro l'ipotesi. Posso scambiare $\underline{w}_2$ con uno degli $\underline{u}_2, \dots, \underline{u}_K$

Posso supporre $\underline{u}_2 \rightsquigarrow$

$\underline{w}_1, \underline{w}_2, u_3, \dots, \underline{u}_k$. Scambio ora $\underline{w}_3$

$$\underline{w}_3 = \alpha_1 \underline{w}_1 + \alpha_2 \underline{w}_2 + \alpha_3 \underline{u}_3 + \dots + \alpha_n \underline{u}_n ,$$

uno dei $\alpha_3, \dots, \alpha_n$ deve essere $\neq \underline{0}$, per es. $\alpha_3 \longrightarrow$

$\underline{w}_1, \underline{w}_2, w_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5, \dots, \underline{u}_n$, e così via.

Corollario $\# B \leq \# A$

Infatti: se fosse $k < t$, dopo aver scambiato k vettori di B, otterrei $\underline{w}_{k+1} \in \operatorname{Span}\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ e B non sarebbe indipendente.

<u>dim teorema</u> Basta applicare il lemma alle due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ date: $\#\mathcal{B}' \leq \#\mathcal{B}$, e nell'altro senso trovo $\#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{B}'$

---

qualche esercizio.

dim che i vettori $(1,1,1)$ $(0,1,-1)$ sono lin. indip. $V=\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}^3$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha = 0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases} \qquad \beta = 0$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha = \beta = \gamma = 0}$$

Esprimere il vettore $\underline{X}$ come comb. lineare di $\underline{A}$, $\underline{B}$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = \alpha \underline{A} + \beta \underline{B} = 1 \cdot \underline{A} + (-1) \underline{B}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \cdot 0 \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$