Lezione del 14/1/2014

- addendo -

Lemma. Sia $\sigma \in \Sigma_n$ una permutazione e sia σ^{-1} la permutazione inversa di σ (cioè: $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = id$).
Allora:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$$

---

dim. Infatti, se σ è prodotto di k trasposizioni

$$\sigma = t_1 \cdots t_k$$

allora

$$\sigma^{-1} = (t_1 \cdots t_k)^{-1} = t_k^{-1} \cdots t_1^{-1} = t_n \cdots t_1$$

perché $t^{-1} = t$ per una trasposizione. Quindi anche σ^{-1} è prodotto di k trasposizioni, e in particolare σ e σ^{-1} hanno lo stesso segno.

Teorema. $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora:

$$\det A = \det {}^tA$$

<u>dim</u>. (usando la formula).

Si ha:

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

e

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} =$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{\sigma(1)\,\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots {}_{\sigma(n)\,\sigma^{-1}(\sigma(n))} =$$

Per il lemma si può scrivere:

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{\sigma(1)\sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdots a_{\sigma(n)\sigma^{-1}(\sigma(n))}$$

$$= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} =$$

$= \det A$ (al variare di σ, la σ^{-1} percorre tutte le permutazioni) —

<u>Corollario</u> det A soddisfa i 3 assiomi (multilinearità, alternanza, normalizzazione) anche rispetto alle colonne.

<u>dim</u> Infatti, le righe di ${}^tA$ corrispondono alle colonne di A