Lezione del 12/12/2013

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (3\ 5)$$

TRASPOSIZIONE

es $\quad id = (1\,2)(1\,2)$

$$= (3\,4)(3\,4)(3\,4)(3\,4)$$

Abbiamo introdotto il gruppo simmetrico

$$\Sigma_n = \left\{ \text{permutazioni } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\}$$

Notazione più concisa per le permutazioni che scambiano solo 2 elementi: $\tau = (i\ j)$ scambia $i \leftrightarrow j$ e fissa tutti gli altri numeri.

<u>Prop</u> 1. Ogni $\sigma \in \Sigma_n$ è prodotto di trasposizioni.

<u>dim</u>. Moltiplichiamo $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$

per $\tau = (1\ \ \sigma(1))$

Il prodotto $\tau\sigma = \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & \sigma'(2) & & \sigma'(n-1) & \sigma'(n) \end{pmatrix}$

fissa 1. Moltiplicando ora σ' per la trasposizione $\tau' = (2, \sigma'(2))$ si trova:

$$\tau'\sigma' = \tau'\tau\sigma = \sigma'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ 1 & 2 & \sigma''(3) & \cdots\cdots & \sigma''(n) \end{pmatrix}$$

fissa sia 1 che 2. Andando avanti così, moltiplicando successivamente per trasposizioni, troveremo:

$$\tau'' \cdots \tau'\tau\sigma = \mathrm{id},$$

quindi $\sigma = (\tau'' \cdots \tau'\tau)^{-1} = \tau\tau' \cdots \tau''$

(ricordiamo che l'inverse di una trasposizione τ è τ stessa).

Prop. 2. Se $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k = \lambda_1 \cdots \lambda_h$, con τ_i, λ_j trasposizioni, allora k e h sono entrambi pari o entrambi dispari.

---

dim Consideriamo delle variabili $x_1, \dots, x_n$ e il polinomio

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i<j} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

es con $n=3$. $P(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

Il gruppo Σ_n "agisce" permutando le variabili:

$$P(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \pm P(x_1, \dots, x_n)$$

Nell'esempio, se $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, allora

$$P(x_2, x_3, x_1) = (x_3 - x_2)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

invece se $\sigma = (1\ 2)$ allora

$$P(x_2, x_1, x_3) = (x_1 - x_2)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1) = -(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

IDEA: una trasposizione cambia segno al polinomio $P(x_1, \dots, x_n)$

Infatti: sia $\tau = (r\ s)$ $\quad r < s$

$$P(x_1, \dots, x_{r-1}, x_s, x_{r+1}, \dots, x_{s-1}, x_r, x_{s+1}, \dots, x_n)$$

ci sono $s - r + s - 1 - r = 2(s-r) - 1$ coppie che cambiano segno. Ne segue: il prodotto di un numero dispari di trasposizioni cambia segno al polinomio, un prodotto pari no.

Chiamiamo PARI una permutazione che sia prodotto di un numero pari di trasposizioni, chiamiamo dispari una permutazione che sia prodotto di un numero dispari di trasposizioni.

nota: PARI × PARI = PARI, PARI × DISPARI = DISPARI, DISPARI × DISPARI = PARI

Possiamo quindi associare un <u>segno</u> $= \pm 1$ ad ogni permutazione:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ pari} \\ -1 & \sigma \text{ dispari} \end{cases}$$

Per la nota segue si ha: $\boxed{\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)}$

ESISTENZA DEL DETERMINANTE

Sia $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Consideriamo l'espressione:

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\, a_{3\sigma(3)} \cdots\cdots a_{n\sigma(n)}}$$

es.: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\quad \det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ $\quad$ 2 termini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det A = {} & a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} \\ & - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} \\ & + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} \end{aligned}$$

6 termini; per matrici 4×4 24 termini, 5×5 120 termini, ...

<u>Teorema</u>. La funzione det soddisfa i 3 assiomi della volta scorsa.

<u>dim</u> <u>Assioma di multilinearità</u>.

Verifichiamolo per la 1ª riga (in generale è analogo).

Se $A_1 = \lambda A_1' + \mu A_1''$, cioè $a_{1j} = \lambda a_{1j}' + \mu a_{1j}''$ $\quad j = 1, \dots, n$

allora

$$\det A = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\lambda a'_{1\sigma(1)} + \mu a''_{1\sigma(1)} \right) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \mu \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a''_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \det \begin{bmatrix} A_1' \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \mu \det \begin{bmatrix} A_1'' \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Scambio di righe.

Si scambino le righe h e k di A $(h<k)$, ottenendo una nuova matrice B. [Si ha $b_{hj}=a_{kj}$, $b_{kj}=a_{hj}$]
$j=1,\dots,n$

$$\det B=\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)}\cdots b_{h\sigma(h)}\cdots b_{k\sigma(k)}\cdots b_{n\sigma(n)}=$$

$$=\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\; a_{1\sigma(1)}\cdots a_{k\sigma(h)}\cdots a_{h\sigma(k)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

Sia $\tau=(h\,k)$ e sia $\lambda=\sigma\tau$. Allora:

$\lambda(i)=\sigma(i)$ se $i\neq h,k$,

$\lambda(h)=\sigma(k)$, $\lambda(k)=\sigma(h)$.

<u>nota</u>: al variare di $\sigma \in \Sigma_n$, $\lambda = \sigma\tau$ varierà anch'essa fra tutte le permutazioni possibili

[deriva dalla <u>legge di cancellazione</u> in un gruppo:

se $\quad gh = g'h \implies g = g'$ (a destra)

$\quad hg = hg' \implies g = g'$ (a sinistra)]

Si noti inoltre che:

$$\operatorname{sgn} \lambda = \operatorname{sgn}(\sigma\tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$$

Quindi:

$$\det B = \sum_{\lambda \in \Sigma_n} - \operatorname{sgn}(\lambda)\, a_{1\lambda(1)} \cdots a_{h\lambda(h)} \cdots a_{k\lambda(k)} \cdots a_{n\lambda(n)}$$

$$= - \det A .$$

<u>Assioma di normalizzazione</u>

$\det I = 1$ segue subito.

Def. Il <u>complemento algebrico</u> o <u>cofattore</u> dell'elemento $a_{ij} \in A \in M_n(K)$ è il determinante:

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema [sviluppo di Laplace per righe o per colonne].

Si ha:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \mathcal{A}_{ij} \qquad , \text{ per ogni } i \text{ fissato.}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \mathcal{A}_{ij} \qquad , \text{ per ogni } j \text{ fissato.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

sviluppo tramite I riga:

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 + 1 + 6 = 15$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

sviluppo secondo la II colonna:

$$(+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dim Si può vedere che la funzione:

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, \mathcal{A}_{1j}$$

[sviluppo secondo I riga]

soddisfa gli assiomi 1), 2), 3). Allora necessariamente coinciderà col determinante.

La dimostrazione per lo sviluppo tramite altre righe o colonne è analoga.

linearità sulle righe:

I riga: è immediata:

$$a_{1j} = \lambda a'_{1j} + \mu a''_{1j} \Longrightarrow$$

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda a'_{1j} + \mu a''_{1j}\right) Q_{1j} =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} a'_{1j} Q_{1j} + \mu \sum_{j=1}^{n} a''_{1j} Q_{1j} = \lambda \varphi \begin{bmatrix} A'_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} + \mu \varphi \begin{bmatrix} A''_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

nella II riga. $a_{2j} = \lambda a'_{2j} + \mu a''_{2j}$

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \, A_{1j}$$

Siccome $A_{1j} = \pm \det$

applico la validità dell'assioma 1) a A_{1j} che è un determinante.

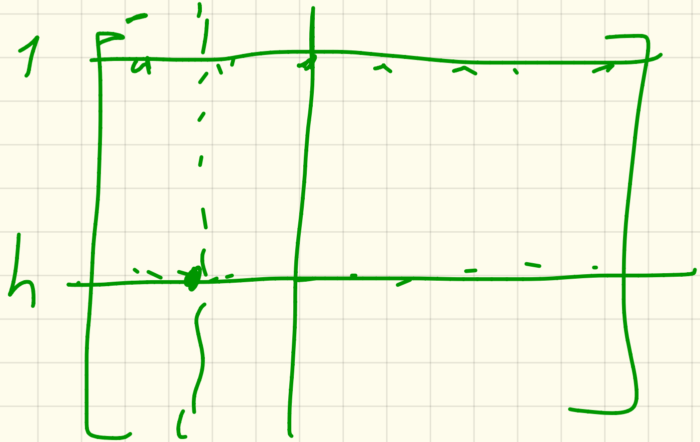
Scambio di righe

Se scambio 2 righe di indici h, k, con $h \neq 1$, $k \neq 1$:

ogni a_{1j} cambia segno $\Rightarrow \varphi(A)$ cambia segno.

Più difficile se scambio la I riga con un'altra

$\det(A) = \sum a_{1j}\, \mathcal{A}_{1j}$



Posso supporre, per induzione su n, che il teorema sia vero.

[La base dell'induzione: caso 1×1, 2×2 sono ovvi.]

Applico l'ipotesi induttiva ad $\mathcal{A}_{1j}$, che è di ordine $n-1$.

Ci conviene sviluppare $\mathcal{a}_{1j}$ usando la h-sima riga (di A, che è la $(h-1)$-sima di $\mathcal{a}_{1j}$)

$$\psi(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, \mathcal{a}_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \left(\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} a_{hl}\, \tilde{\mathcal{a}}^{j}_{hl} \right)$$

$$= \sum \sum a_{1j}\, a_{hl} \boxed{\tilde{\mathcal{a}}^{j}_{hl}}$$

$\pm$ determinante della sottomatrice di A

ottenuta cancellando le righe $1, h$, e le colonne j e

Se scambiamo la 1ª riga con la h-sima riga otteniamo una matrice

$$B = \begin{bmatrix} a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hn} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{h-1,1} & a_{h-1,2} & \cdots & a_{h-1,n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{h+1,1} & a_{h+1,2} & - & a_{h+1,n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Allora lo sviluppo di B per la 1^a riga è:

$$\varphi(B) = a_{h1} B_{11} + \cdots + a_{hn} B_{hn}$$

e sviluppando ogni B_{1j} per la sua $(h-1)$-sima riga (che è la h-sima riga di B) si troverà:

$$\varphi(B) = \sum \sum a_{hl}\, a_{1j}\, \tilde{B}^j_{hl}$$

con $\tilde{B}^j_{hl} = \pm$ determinante della sottomatrice ottenuta da A cancellando le righe $1, h$ e le colonne j, l,

quindi $\tilde{B}^j_{hl} = \pm \hat{a}^j_{hl}$.

Si verifica che il segno è sempre opposto (non lo dimostriamo: provare per $h=2$).

Anche la verifica del III assioma $\varphi(I)=1$ è lasciata come esercizio.