Lezione del 11/2/2014

Esercizi.

1. Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile $\Rightarrow$

(a) $\det A =$ prodotto autovalori di A (con molteplicità);

(b) $\operatorname{tr} A =$ somma autovalori di A (con molteplicità).

2. Stesse conclusioni dell'es. 1 per A triangolarizzabile (def: A è triangolarizzabile se $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $P^{-1}AP = T$ triangolare)

3. $A \in M_n(\mathbb{K})$ è triangolarizzabile $\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$ ha n radici (con molteplicità) in $\mathbb{K}$ (cioè $\sum m_a(\lambda) = n$, la somma essendo fatta su tutti gli autovalori)

PRODOTTI SCALARI

$\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ prodotto scalare. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V. Abbiamo visto prima che gli n^2 numeri $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$ determinano φ, nel senso che se

$$\underline{u} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n , \qquad \underline{x} = [\underline{u}]_{\mathcal{B}}$$
$$\underline{v} = y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n , \qquad \underline{y} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}$$

allora $$\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) \qquad (*)$$

Detta $A = \left(\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)\right)_{i,j=1,\dots,n}$, che è <u>simmetrica</u>, la $(*)$ si riscrive

$$\boxed{\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = {}^t\underline{x} \, A \, \underline{y}}$$

La matrice $A = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))$ si chiama la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

<u>Teorema</u>. Sia $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ un'altra base di V, e sia $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. Se $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)$, allora:

$$\boxed{A' = {}^tP\,A\,P}$$

<u>dim</u>. $(A')_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = {}^t[\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}\, A\, [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = {}^t(P^i)\, A\, P^j = ({}^tP A P)_{ij}$.

<u>Def.</u> Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ t.c. $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = {}^tPAP$ si dicono CONGRUENTI (e si scrive $A \equiv B$)

<u>Esercizio.</u> La congruenza è una relazione di equivalenza (<u>diversa</u> dalla similitudine).

Vorremmo, se possibile, caratterizzare le classi di equivalenza con degli invarianti. Ad es.:

<u>Prop.</u> 1) Se $A \equiv B \Rightarrow rg(A) = rg(B)$

2) Se $A \equiv B$, A, B <u>reali</u> $\Rightarrow \det A$ e $\det B$ hanno lo stesso segno.

<u>dim</u> 1) $\operatorname{rg} {}^tPAP = \operatorname{rg} A$ perché P e ${}^tP$ sono non singolari.

2) Per il teo. di Binet:

$$\det({}^tPAP) = \det {}^tP \det A \det P = \det A \cdot (\det(P))^2$$

perché $\det P = \det {}^tP$, da cui si conclude.

<u>Def</u> Dato $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$, si dice <u>rango di φ</u> il rango di $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, per una qualunque base $\mathcal{B}$ di V. Per la proposizione precedente, la definizione data è corretta perché non dipende dalla base data.

Def. $\underline{u}, \underline{v} \in V$ si dicono ortogonali (rispetto al prodotto φ) se $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = 0$

Def. Il RADICALE di φ è il sottospazio

$$V^{\perp} = \{ \underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ , \forall \underline{w} \in V \}$$

[esercizio: $V^{\perp}$ è un sottosp. vett. di V]

$$\underline{v}, \underline{w} \in V^{\perp} \overset{?}{\Rightarrow} \underline{v} + \underline{w} \in V^{\perp}$$

$$\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{u}) = \underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{u})}_{=0} + \underbrace{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}_{=0}$$

φ si dice NON DEGENERE se $V^\perp = \{\underline{0}\}$.

Es (1) Il prodotto canonico è non degenere:

su $\mathbb{R}$: $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$,

su $\mathbb{C}$: $\langle \underline{x}, \overline{\underline{x}} \rangle = x_1 \overline{x}_1 + \dots + x_n \overline{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

(2) $V = \mathbb{R}^2$: $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$. $\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

(NOTA: può essere $\varphi(\underline{x}, \underline{x}) = 0$, es $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$)

3) $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_1$ $\qquad V^\perp = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Teorema. Se $\mathcal{B}$ è una base di V e $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, allora

$$V^{\perp} \cong \operatorname{Ker} A, \quad \text{tramite} \quad \underline{v} \longmapsto [\underline{v}]_{\mathcal{B}}.$$

---

dim. $\underline{v} \in V^{\perp} \iff {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}} A \underline{x} = \underline{0} \quad \forall\ \underline{x} \in \mathbb{K}^n,$

$\iff \operatorname{rg}\left[{}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}} A\right] = 0 \iff {}^t[\underline{v}]_{\mathcal{B}} A = \underline{0} \underset{\text{trasponendo}}{\iff} A[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \underline{0}$

$\iff [\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} A$, quindi $V^{\perp} \cong \operatorname{Ker} A$.

Corollario. φ è non degenere $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è non singolare ($\iff \operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \dim V$)

Corollario $\dim V^{\perp} = \dim \operatorname{Ker} A$.

Dato un qualunque <u>sottoinsieme</u> $S \subset V$, si denota con

$$S^{\perp} = \{ \underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \quad \forall\ \underline{w} \in S \}$$

e si dirà l'<u>ortogonale</u> di S (rispetto a φ).

<u>Esercizi</u> 1. $S^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V.

2. $S \subset T \Rightarrow S^{\perp} \supset T^{\perp}$, $\forall$ sottoinsiemi S, T di V.

3. $S^{\perp} = (\operatorname{Span} S)^{\perp}$, per ogni sottoinsieme S di V.

---

1. $\underline{v}, \underline{w} \in S^{\perp} \Rightarrow \underline{v} + \underline{w} \in S^{\perp}$

$\underline{u} \in S$ $\qquad \varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{u}) = \overset{=0}{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overset{=0}{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$

__Teorema__. Sia $W \subset V$ sottospazio vettoriale di V.
Allora:

$$\boxed{\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W + \dim(W \cap V^{\perp})}$$

__dim__. Sia $\mathcal{C} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$, $k = \dim W$, base di W. Per l'esercizio 3 sopra si ha: $\mathcal{C}^{\perp} = (\mathrm{Span}\, \mathcal{C})^{\perp} = W^{\perp}$, cioè $\underline{v} \in W^{\perp} \iff \underline{v}$ è ortogonale ad ogni $\underline{w}_i$, $i = 1, \dots, k$. Passando alle coordinate rispetto a una base $\mathcal{B}$ di V si ha, detta

$$A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) \qquad (\in M_n(\mathbb{K}),\ n = \dim V)$$

$\underline{v} \in W^\perp \Leftrightarrow {}^t[\underline{w}_i]_{\mathcal{B}} A [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0 \quad , i = 1, \cdots, k \Leftrightarrow$

$[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} {}^tBA$

dove $\quad B = \left[[\underline{w}_1]_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| [w_k]_{\mathcal{B}} \right]$

Quindi $\dim W^\perp = n - \operatorname{rg} {}^tBA = n - \operatorname{rg} AB \qquad (*)$

perché $\operatorname{rg} {}^tBA = \operatorname{rg} {}^t({}^tBA) = \operatorname{rg} {}^tAB = \operatorname{rg} AB$ essendo A simmetrica. Ma:

(visto diverse volte)

$\operatorname{rg} AB = \dim A(\operatorname{Im} B) = \dim(\operatorname{Im} B) - \dim(\operatorname{Im} B \cap \operatorname{Ker} A) =$

$= \dim W - \dim (W \cap V^\perp)$

perché $W \cap V^\perp \ni \underline{w} \longrightarrow [\underline{w}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Im} B \cap \operatorname{Ker} A$

è un isomorfismo. Sostituendolo in (*) si conclude.

<u>Corollario</u> $\dim W^\perp \geq \dim V - \dim W$, per ogni sottospazio W di V. Vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow$ $W \cap V^\perp = \{\underline{0}\}$ (in particolare, se φ è non degenere).

<u>Corollario</u> $\varphi|_W : W \times W \to \mathbb{K}$ è non degenere $\Leftrightarrow$

$$V = W \oplus W^\perp$$

<u>dim</u> $\varphi|_W$ non degenere $\Leftrightarrow$ $\nexists$ $\underline{w} \in W$, $\underline{w} \neq \underline{0}$, t.c. $\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0$

$\forall \underline{w}' \in W \iff W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff$

$\iff V = W \oplus W^\perp$ (perché $\dim W + \dim W^\perp \geq \dim V$)

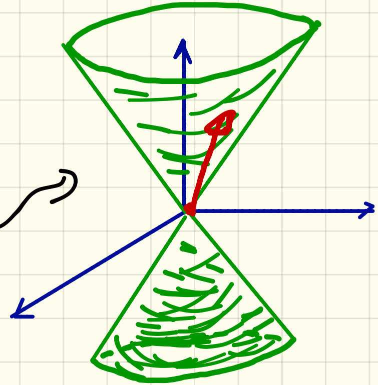
Def. $\underline{v} \in V$ si dice <u>isotropo</u> se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

Esempio. Sia $\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 .$$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ è isotropo $\iff x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

[i vettori isotropi formano un cono]



Se $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \neq 0$, $\underline{v}$ si dirà <u>non-isotropo</u>.

<u>Oss</u>. 1) $\underline{v} \in V$ è non-isotropo $\iff$ $\varphi|_{Span(\underline{v})}$ è non-degenere $\iff$ $V = Span(\underline{v}) \oplus [Span(\underline{v})]^{\perp}$

2) $\underline{v} \in V$ è isotropo $\iff$ $\underline{v} \in [Span\,\underline{v}]^{\perp}$

<u>Oss</u>. Può essere $\dim[Span\,\underline{v}]^{\perp} = n-1$ ma $\underline{v}$ isotropo, e quindi $Span(\underline{v})$ e $[Span(\underline{v})]^{\perp}$ non sono in somma diretta.

Def. Una base ortogonale di V è una base $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$, $n = \dim V$, tale che $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0$, se $i \neq j$.

Oss. $\mathcal{B}$ è una base ortogonale per φ $\Leftrightarrow$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è diagonale.

Teorema (Lagrange). Ogni spazio vettoriale V con prodotto scalare φ ha una base ortogonale.

---

dim. [algoritmo di ortogonalizzazione].
Procediamo per induzione su $n = \dim V$. Se $n = 1$, ogni base (di 1 solo vettore) è ortogonale.

Partiamo da una base qualunque $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V.

Se $\mathcal{B}$ è ortogonale, abbiamo finito. Altrimenti, distinguiamo due casi:

(i) se uno dei vettori della base $\mathcal{B}$ è non-isotropo, ad es. $\underline{v}_1$ $(\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1) \neq 0)$, allora

$$V = \operatorname{Span} \underline{v}_1 \oplus [\operatorname{Span} \underline{v}_1]^{\perp}$$

Sia $W = [\operatorname{Span} \underline{v}_1]^{\perp}$. Per ipotesi induttiva, $\dim W = n-1$, W ha base ortogonale rispetto al prodotto $\varphi|_{W \times W}$: $\underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n$. I $\underline{w}_j$ sono ortogonali e 2 a 2 rispetto a φ, e per costruzione sono ortogonali anche a $\underline{v}_1$. Quindi

$\underline{v}_1, \underline{w}_2, \cdots, \underline{w}_n$ è base ortogonale per V.

(ii) Supponiamo tutti i $\underline{v}_j$ isotropi $(j=1,\cdots,n)$. Se fosse anche $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0$, $\forall\ i,j$, allora φ sarebbe il prodotto nullo (esercizio!) rispetto al quale tutte le basi sono ortogonali. Altrimenti, $\exists\ i,j$ t.c. $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) \neq 0$.
Allora il vettore $\underline{v}' = \underline{v}_i + \underline{v}_j$ è non-isotropo:

$$\varphi(\underline{v}_i + \underline{v}_j, \underline{v}_i + \underline{v}_j) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) + 2\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) + \varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_j) = 2\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) \neq 0$$

perché $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = \varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_j) = 0$.
Allora come sopra $V = \mathrm{Span}(\underline{v}_1') \oplus [\mathrm{Span}\, \underline{v}_1']^{\perp}$ e si procede come al punto (i).

__Corollario.__ Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ simmetrica.
Allora $\exists$ $P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. ${}^tPAP = D$ è diagonale.

__dim__.

Infatti, si applichi il teorema a $V = \mathbb{K}^n$, $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$ definito da $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = {}^t\underline{x} A \underline{y}$. Si ha $M_{\mathcal{E}}(\varphi) = A$, dove $\mathcal{E}$ è la base canonica (*) Se $\mathcal{B}$ è base ortogonale per φ, allora $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = D$ è diagonale. Per il teorema di cambiamento di base per i prodotti scalari, $\exists$ $P \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $D = {}^tPAP$.

(*) $\quad {}^t\underline{e}_i A \underline{e}_j = a_{ij}$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

<u>Teorema di Sylvester complesso</u>. Sia V sp. vett. su $\mathbb{C}$, $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ prod. scalare di rango r. Allora $\exists$ base $\mathcal{B}$ di V t.c. $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$.

<u>dim</u>. Sia $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ base ortogonale (per Lagrange), ordinata in modo che i vettori isotropi (eventuali) stiano in fondo. Allora $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è diagonale. Inoltre, poiché il rango $rg(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = r$ per ogni base $\mathcal{B}$, si ha $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) \neq 0$ per $i = 1, \dots, r$, $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 0$ per $i = r+1, \dots, n$. Allora

$\underline{v}_i' = \frac{1}{\sqrt{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}} \underline{v}_i$, $i = 1, \dots, r$, (dove $\sqrt{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$ è una radice complessa)

$\underline{v}_i' = \underline{v}_i$, $i = r+1, \dots, n$, produce la base cercata.

<u>Corollario</u>. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ simmetriche sono congruenti $\iff$ hanno lo stesso rango.

<u>dim</u> $\Rightarrow$ già visto. $\Leftarrow$ Per il teorema, applicato a $\varphi_A : (\underline{x}, \underline{y}) \to {}^t\underline{x} A \underline{y}$; $\varphi_B : (\underline{x}, \underline{y}) \to {}^t\underline{x} B \underline{y}$, $\exists$ $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ t.c. ${}^tPAP = {}^tQBQ = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. Segue: ${}^t(PQ^{-1}) A (PQ^{-1}) = B$.

Caso $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Un prodotto scalare $\varphi: V \times V \to \mathbb{R}$ su uno sp. vettoriale reale si dice **DEFINITO POSITIVO** se $\varphi(\underline{v},\underline{v}) > 0$, $\forall \underline{v} \neq \underline{0}$;

<u>es.</u>: il prodotto canonico di $\mathbb{R}^n$ è def positivo.

- si dice **DEFINITO NEGATIVO** se $\varphi(\underline{v},\underline{v}) < 0$, $\forall \underline{v} \neq \underline{0}$;

es.: $\varphi(\underline{x},\underline{y}) = -\sum x_i y_i$ in $\mathbb{R}^n$.

- si dice **INDEFINITO** se è non degenere e non è definito (né positivo né negativo).

es.: $\varphi(\underline{x},\underline{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k - x_{k+1} y_{k+1} - \dots - x_n y_n$ in $\mathbb{R}^n$.

<u>Oss.</u> Se φ è definito (positivo o negativo) allora è non degenere. Infatti $\underline{v} \in V^{\perp} \Rightarrow \varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0$, ma questo vale solo per $\underline{v} = \underline{0}$.

<u>notazione</u>. Scriveremo $\varphi > 0$, $\varphi < 0$ per indicare che φ è definito positivo o definito negativo rispettivamente.

Dato V sp. vett. su $\mathbb{R}$, $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ prod. scalare, definiamo

INDICE DI POSITIVITÀ di φ = $i_+(\varphi)$ =

$$= \max\{\dim W \mid W \text{ sottosp. di } V,\ \varphi|_{W\times W} > 0\}$$

INDICE DI NEGATIVITÀ di φ = $\iota_-(\varphi)$ =

$$= \max\{\dim W \mid W \text{ sottosp. di } V,\ \varphi|_{W\times W} < 0\}$$

INDICE DI NULLITÀ di φ = $\iota_0(\varphi)$ =

$$= \dim V^\perp$$

NOTA $\boxed{\iota_0(\varphi) = \dim V - \operatorname{rg}(\varphi)}$

Infatti, abbiamo visto che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} A$,
$A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, $\mathcal{B}$ base di V, e per def. $\operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg} A$.

Teorema (di Sylvester reale). Sia V sp. vett. reale, $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ prod. scalare di rango r. $\forall$ base ortogonale $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V si ha:

$$\#\{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) > 0\} = i_+(\varphi) \;;$$

$$\#\{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) < 0\} = i_-(\varphi) \;;$$

$$\#\{i \mid \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 0\} = i_0(\varphi)$$

[quindi $i_+(\varphi) + i_-(\varphi) = \mathrm{rg}(\varphi)$]. Inoltre esiste base ortogonale $\mathcal{B}$ tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left[\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array}\right]$$

$$p = \iota_+(\varphi)$$

$$q = \iota_-(\varphi)$$