22/05/2019 - *Compito Geometria (corso A)*

Nome e Cognome (stampatello) ....

Matricola.............................

Parte I [24 punti]. *Per ogni quesito riempire col risultato*

1. Si calcoli $(1+i)^{17} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ e i suoi sottospazi
$$W_1 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right), \quad W_2 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+w=0\right\}.$$
   (a) Determinare $\dim W_1$: ....
   (b) Determinare $\dim W_2$: ....
   (c) Trovare un'equazione cartesiana per W_1 : ....
3. Indicare qui .... per quali valori dei parametri a, b, c si diagonalizza la seguente matrice $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ a & b & c\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.
4. Elencare qui .... tutti gli autovalori complessi di una matrice A tale che $A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + I = 0$. Giustificare la risposta qui sotto:

   ....

   ....
5. Nello spazio delle matrici reali 2×2, si scriva rispetto alla base canonica $e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2}$ la matrice $\begin{pmatrix}\dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}$ di un prodotto scalare non degenere la cui restrizione al sottospazio delle matrici diagonali sia degenere.
6. Si calcoli la segnatura $(i_+, i_-, i_0) = \dots\dots\dots\dots\dots$ della seguente matrice $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}$. Si scrivano qui .... le coordinate di un vettore isotropo.

7. In $\mathbb{R}^3$, si trovi una base $\left\{ \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} \right\}$ ortonormale rispetto al prodotto canonico che sia fatta da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Parte II [12 punti] *(Scrivere su un foglio – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte)*

Esercizio 1.

Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $O(3)$ l'insieme delle matrici 3×3 ortogonali. Sia inoltre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$.

1. Sia $v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice ortogonale U la cui prima colonna sia uguale a v.

2. Sia $v \in V$ un vettore tale che $\langle v, v \rangle = 1$. Dimostrare che esiste una matrice $U \in O(3)$ la cui prima colonna è v.

3. Sia W un sottospazio di V con la seguente proprietà: per ogni $U \in O(3)$, il sottospazio W è U-invariante (cioè per ogni $w \in W$ l'immagine $U(w)$ appartiene a W). Dimostrare che se $W \neq \{0\}$, allora $W = V$.

4. Sia $M \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ una matrice. Supponiamo che M commuti con ogni matrice $U \in O(3)$: dimostrare che $\ker M$ è un sottospazio invariante per ogni $U \in O(3)$.

5. Sia $M \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ una matrice. Supponiamo che M commuti con ogni matrice $U \in O(3)$: dimostrare che M è un multiplo dell'identità.

   Indicazione. Anche se $\ker M$ è banale, si può trovare λ tale che $\ker(M - \lambda\,\mathrm{Id})$ non sia banale...

Soluzione esercizio.

1. Una matrice U è ortogonale se e solo se le sue colonne sono ortonormali rispetto al prodotto scalare standard. Si tratta quindi di trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ contenente v: i vettori di questa base formeranno le colonne di una matrice ortogonale. Un esempio di una tale base

$$v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Come al punto 1, sufficiente dimostrare che v fa parte di una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, e questo è un teorema visto in classe. Più precisamente, sappiamo che v pu essere completato ad una base *ortogonale* v, v_2, v_3 utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt; a meno di riscalare v_2, v_3 per un opportuno scalare, possiamo supporre che $\langle v_2, v_2\rangle = \langle v_3, v_3\rangle = 1$, cioè che $\{v, v_2, v_3\}$ sia ortonormale (visto che sappiamo già che èortogonale), e questo è quanto voluto.

3. Sia $\underline{u} \in W$, $\underline{u} \neq 0$. Se fosse $W \neq V$, esisterebbe un vettore $\underline{v} \neq 0$ in $V \setminus W$, con $\|\underline{v}\| = \|\underline{u}\|$. Esiste una rotazione che porta $\underline{u}$ in $\underline{v}$: basta prendere l'asse individuato da $(Span(\underline{u}, \underline{v}))^{\perp}$ e l'angolo formato dai due vettori. La matrice di tale rotazione è ortogonale e non stabilizza W, il che è una contraddizione.

4. Un lemma visto a lezione dice che, se due matrici commutano fra loro, allora gli autospazi dell'una sono invarianti per l'altra. Osserviamo che M ed U commutano, e che $\ker M$ è un autospazio di M (quello relativo all'autovalore zero): il risultato voluto segue allora direttamente dal lemma appena ricordato.

5. Sia $p_M(t)$ il polinomio caratteristico di M. Siccome M è una matrice 3×3, $p_M(t)$ un polinomio di grado 3, e come tale ha una radice reale λ. Sia $N := M - \lambda\,\mathrm{Id}$: per costruzione, il nucleo di N è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ diverso da $\{0\}$. Inoltre, per ogni $U \in O(3)$ abbiamo $MU = UM \Rightarrow (M - \lambda\,\mathrm{Id})U = U(M - \lambda\,\mathrm{Id}) \Rightarrow NU = UN$. Dal punto 4 e dall'osservazione che $\ker N \neq \{0\}$ segue allora $\ker N = \mathbb{R}^3$, ovvero $N = 0$. Ma per costruzione $N = M - \lambda\,\mathrm{Id}$, quindi $M = \lambda\,\mathrm{Id}$ come voluto.