14/09/2020 - *Quarto scritto di Geometria (corso A)*

Parte I. *Per ogni quesito digitare la risposta.*

1. Determinare equazioni parametriche per due rette ortogonali tra loro e giacenti sul piano di equazione cartesiana $x + y + z = 1$.

2. Sia V lo spazio degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$. Dato un piano π passante per l'origine, sia W il sottospazio di V formato dagli endomorfismi $f \in V$ per cui π è invariante, cioe' tali che $f(\pi) \subseteq \pi$.

   a) Calcolare la dimensione $dim(W)$ di W.

   b) Giustificando la risposta, dire se l'insieme $W_s \subset W$ degli endomorfismi simmetrici di W è sottospazio di W.

   c) In caso affermativo, calcolarne la dimensione $dim(W_s)$.

3. Sia V lo spazio dei polinomi reali di grado minore o uguale a 3, e sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(p(t)) = (t + 1)p''(t^2)$.

   a) Scrivere in base canonica la matrice $M_{can}(f)$ associata a f.

   b) Determinare una base di $Ker(f)$ ed una di $Im(f)$.

4. Sia M_k la matrice $\begin{pmatrix} k & 2 & k-1 \\ 0 & k & 0 \\ k & k & k-1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

   a) Per $k = 0$, determinare gli autovalori di M_k con le loro molteplicità algebriche e geometriche.

   b) Determinare i valori di k per cui M_k risulta essere diagonalizzabile.

5. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

   $$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1+4x_2)y_1+(4x_1-x_2+2x_3)y_2+(2x_2+x_3)y_3.$$

   a) Scrivere in base canonica la matrice $M_{can}(\phi)$ associata a ϕ.

   b) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a ϕ.

   c) Trovare la segnatura (i_+, i_-, i_0) di ϕ.

Parte 2. *Svolgere su (al max 2) fogli e inviare la foto.*

Esercizio SIa V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e φ un prodotto scalare su V. Un endomorfismo $f : V \to V$ si dira' φ-ortogonale se

$$\varphi(v, w) = \varphi(f(v), f(w)), \quad \forall\ v, w \in V$$

1. Dimostrare che se φ è non-degenere allora ogni endomorfismo f φ-ortogonale è un isomorfismo.

2. Sia $\mathcal{B}$ una base di V, sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ la matrice associata al prodotto scalare φ rispetto a $\mathcal{B}$ e sia $M = M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice associata all'endomorfismo f rispetto a $\mathcal{B}$. Dimostrare che f è φ-ortogonale se e solo se vale la relazione

$$^tMAM \ = \ A.$$

   Dedurre che $det(M) = \pm 1$.

3. Se φ è non degenere di segnatura $(p, q, 0)$ allora

$$O_{p,q} := \ \{f : V \to V : \ f \text{ è } \varphi\text{-ortogonale}\}$$

   è un sottogruppo di $GL(V)$ (si tratta di dimostrare che è chiuso per composizione e per inverso).

4. In termini di un parametro, descrivere tutte le matrici in $O_{1,1}$, facendo vedere che quelle con determinante 1 sono simmetriche e hanno autovettori isotropi, mentre quelle con determinante -1 hanno autovettori non-isotropi e autovalori 1 e -1.