14/06/2019 - *Scritto Geometria (corso A)*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

Parte I (24 punti). *Per ogni quesito spuntare la casella o riempire col risultato (dove richiesto)*

1. Indicare qui .... il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale che i tre piani $\alpha : 2x + ky + 4z = 4$, $\beta : 3x + y + kz = k$, e $\gamma : x - ky - 4z = k - 6$ si intersecano in una retta. Scrivere qui sotto un'equazione parametrica per la retta intersezione

   $(x, y, z) =$ ....

2. Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcolare $\det AB =$ ....

   (b) Calcolare $\det BA =$ ....

3. Sia ϕ_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito da $\phi_a((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = 3x_1x_2 + 2x_1z_2 + y_1y_2 + 2z_1x_2 + az_1z_2$, dove $a \in \mathbb{R}$. Indicare qui .... per quali valori di a il prodotto ϕ_a è degenere. Al variare di a, si scrivano qui sotto le possibili segnature di ϕ_a

   ....

4. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare gli autovalori di A e le loro molteplicità algebriche:

Autovalore	Molteplicità

   (b) Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A che sia ortogonale rispetto al prodotto scalare standard:

5. Consideriamo lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2, $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Muniamo V del prodotto scalare $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$ e lavoriamo nella base $\mathcal{B} = \{x, 1 + x^2, 1 - x^2\}$.

   (a) Scrivere la matrice del prodotto scalare dato nella base $\mathcal{B}$:

(b) Trovare una base dell'ortogonale di $\mathrm{Span}(x)$ rispetto al prodotto scalare dato:

(c) Scrivere la matrice dell'applicazione lineare derivata $d : V \to V$ in base $\mathcal{B}$:

==

Parte II (12 punti) – si giustifichino in dettaglio su un foglio tutte le risposte

Esercizio 1.

1. Scrivere tutte le matrici $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $B^2 = A$, quando $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e quando $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (chiamiamo una tale matrice B una *radice quadrata* di A).
2. Dimostrare che se $A \in \mathcal{M}_n(R)$ e $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è una radice quadrata di A, allora ogni autospazio di B è contenuto in un autospazio di A.
3. Dimostrare che se $A \in \mathcal{M}_n(R)$ è simmetrica e definita positiva (cioè il prodotto scalare associato ad A rispetto alla base canonica è definito positivo) allora esiste una radice quadrata B di A che è anch'essa simmetrica e definita positiva.
4. Dimostrare che la matrice B del punto precedente è unica.