06/03/2021 - *Secondo Compitino Geometria (corso A)*

Parte I (max 24 punti). *Per ogni quesito riempire con il risultato la pagina adibita a ricevere le risposte. Indicare con precisione a quale domanda si riferisce la risposta.*

1. Rispondere alle seguenti domande, motivando brevemente la risposta:

   a) Se $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, è sempre vero che $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$?

   b) Se $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, è sempre vero che $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$?

2. Considerata $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, rispondere alle seguenti domande:

   a) Scrivere il polinomio caratteristico di A.

   b) Determinare gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

   c) Scrivere il polinomio minimo di A.

   d) Motivando brevemente la risposta, dire se l'insieme di matrici $\{Id, A, A^2, A^3\}$ è indipendente in $\mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

   e) Determinare una matrice P invertibile ed una matrice T triangolare superiore tali che $P^{-1}AP = T$.

3. Denotiamo con ρ_α l'applicazione "riflessione ortogonale" operata rispetto al piano α di $\mathbb{R}^3$:

   a) Scrivere in base canonica la matrice associata a ρ_π, se $\pi : x+y+z = 0$.

   b) Motivando brevemente la risposta, dire se ρ_π è un endomorfismo diagonalizzabile o meno.

4. Rispondere alle seguenti domande motivando brevemente le risposte:

   a) Dire se la seguente affermazione è sempre vera: se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ con $b \neq 0$, allora A è simile a $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

   b) Dire se la seguente affermazione è sempre vera: se $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ non è diagonalizzabile, allora esiste $a \in \mathbb{C}$ tale che A è simile a $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Parte II (max 14 punti). *Giustificare la risposta in un foglio: dopo aver scritto su carta la soluzione in maniera ordinata, caricare sul form una (o al massimo due) foto.*

Esercizio. SIa $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, con base canonica $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$.
Sia $P \in GL_2(\mathbb{R})$ e sia $f_P : V \to V$ l'endomorfismo

$$f_P(X) = X - P^{-1}XP$$

1. Per $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ scrivere la matrice associata ad f_P rispetto alla base canonica $\mathcal{B}$ di V. Dire se f_P è diagonalizzabile e in caso affermativo calcolare una base di autovettori per V.

2. Dimostrare che se P è diagonale allora f_P è diagonalizzabile.

3. Dimostrare che se P e Q sono simili allora f_P è diagonalizzabile se e solo se f_Q lo è. Dedurre che se P è diagonalizzabile allora f_P lo è.