05/12/2020 - *Primo Compitino Geometria (corso A)*

Parte I. *Per ogni quesito riempire con il risultato la pagina adibita a ricevere le risposte. Indicare con precisione a quale domanda si riferisce la risposta.*

1. Calcolare tutte le soluzioni complesse di $(z+i)^3 = i$.

2. Considerati i piani $\pi_1 : x - y + 2z = 4$ e $\pi_2 : 2x + 5y + z = 9$, rispondere alle seguenti domande:

   a) Dire se esiste, ed in tal caso determinarne un'equazione parametrica, una retta ortogonale ad entrambi i piani π_1 e π_2.

   b) Determinarne un'equazione parametrica per la retta r parallela ad entrambi i piani π_1 e π_2 e passante per l'origine.

   c) Determinare un'equazione cartesiana per il piano π_3 contenente r ed ortogonale a π_1.

3. Consideriamo $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ due vettori di $\mathbb{C}^2$. Giustificando brevemente le risposte, svolgere i seguenti punti:

   a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono indipendenti? Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{C}^2$ contenente $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

   b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono indipendenti? Determinare, se possibile, una base di $\mathbb{C}^2$ contenente $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$.

4. Siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbb{R}^5$ e sia $W = \mathrm{Span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$.

   a) Calcolare $\dim(W)$.

   b) Determinare equazioni cartesiane per W nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

   c) Giustificando brevemente la risposta, dire se $\mathbb{R}^5 = W \oplus S$, dove S è lo spazio delle soluzioni del sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

5. Sia $V = \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Giustificando brevemente le risposte, svolgere i seguenti punti:

   a) L'insieme $\{A \in V : \mathrm{rango}(A) < 3\}$ forma un sottospazio di V? In caso affermativo, determinarne la dimensione.

   b) Se $M \in V$ con $\mathrm{rango}(M) = 2$, l'insieme $\{A \in V : A \cdot M = \underline{0}\}$ forma un sottospazio di V? In caso affermativo, determinarne la dimensione.

   c) Se $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, l'insieme $\{A \in V : A \cdot M = M \cdot A\}$ forma un sottospazio di V? In caso affermativo, determinarne la dimensione.

Parte II. *Giustificare la risposta in un foglio: dopo aver scritto la soluzione in maniera ordinata su un foglio (uno o al massimo due immagini perché l'esercizio ammette soluzione molto breve) usare nella colonna a sinistra l'opzione "scan solution" e inserirla seguendo le istruzioni con un telefono cellulare. L'immagine viene aggiunta al testo. Chi non avesse un computer o un telefono cellulare ce lo comunichi.*

Esercizio. In $V = \mathbb{R}^3$ siano $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\underline{u}' = \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix}$ vettori non nulli e sia $M_{\underline{u},\underline{u}'} = (m_{ij})$ la matrice data da $m_{ij} = u_i u'_j$, $1 \le i, j \le 3$.

1. Dimostrare che $\mathrm{rg}(M_{\underline{u},\underline{u}'}) = 1$ e che se una matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ ha rango 1 allora $M = M_{\underline{u},\underline{u}'}$ per qualche coppia di vettori $\underline{u}, \underline{u}'$.

2. Sia $f : V \to V$ data da $f(\underline{x}) = M_{\underline{u},\underline{u}'}\underline{x}, \quad \underline{u}, \underline{u}' \neq \underline{0}$. Dimostrare che Im(f)=Span($\underline{u}$) e che Ker(f) $= \{\underline{x} \in V : < \underline{u}', \underline{x} >= 0\}$, dove $< \underline{u}', \underline{x} >$ denota il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$ tra i vettori $\underline{u}'$ e $\underline{x}$.

3. Sia $\underline{v}$, $\underline{v}'$ un'altra coppia di vettori in V (con $\underline{v}$, $\underline{v}' \neq 0$) e $M_{\underline{v},\underline{v}'}$ la matrice con elementi $m'_{ij} = v_i v'_j$. Sia $A = M_{\underline{u},\underline{u}'} + M_{\underline{v},\underline{v}'}$ $(*)$. Far vedere che $rg(A) \le 2$ e dimostrare inoltre che $rg(A) = 2$ se e solo se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti e $\underline{u}'$ e $\underline{v}'$ sono linearmente indipendenti. Successivamente, supponendo che A sia ottenuta come in (*) con $rg(A) = 2$, dare - giustificando bene la risposta- delle condizioni necessarie e sufficienti su $\underline{u}, \underline{u}', \underline{v}$ e $\underline{v}'$ affinchè il nucleo $Ker(g)$ e l'immagine $Im(g)$ dell'applicazione $g(\underline{x}) = A\underline{x}$ siano in somma diretta.