02/04/2022 - *Terzo Compitino di Geometria (corso A)*

Nome e cognome (stampatello) ....

Matricola ....

Parte I. *Per ogni quesito riempire con la soluzione lo spazio di questo foglio o il campo del form adibito a ricevere la risposta.*

1. Sia V spazio su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare φ. Giustificando la risposta, dire se è sempre vero che:

   a) se esiste un sottospazio isotropo non banale, allora $\iota_0(\varphi) > 0$.

   ....

   ....

   b) Se $V = W_1 + W_2$ per due sottospazi W_1 e W_2 tali che $\varphi_{|W1} > 0$ e $\varphi_{|W2} < 0$, allora $\iota_+(\varphi) = dim(W_1)$ e $\iota_-(\varphi) = dim(W_2)$.

   ....

   ....

2. Sia φ il prodotto scalare di $\mathbb{R}^4$ che, in base canonica, ha matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

   a) Calcolare la segnatura di φ: (......., ..., ...)

   b) Sia $W = Span\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$. Giustificando la risposta, dire se $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$

   ....

   ....

3. Sia $V = \mathbb{R}^3$, con base B data dai tre vettori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Consideriamo $B^* = \{\underline{v}_1^*, \underline{v}_2^*, \underline{v}_3^*\}$ la base duale di B, ed il funzionale lineare $F : V \to \mathbb{R}$ dato da $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y + z$.

   a) Calcolare $\underline{v}_3^*\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$: ....

   b) Calcolare le coordinate di F nella base B^*: (........, ..., ...)

4. Sia $V = Mat_{2x2}(\mathbb{R})$ con prodotto scalare $\varphi(A, B) = tr(A^t \cdot B)$. Consideriamo gli endomorfismi f e g di V dati da $f(A) = A - A^t$ e $g(A) = A^t$.

   a) f è simmetrico rispetto a φ? Se sì, trovare una base ortonormale di V fatta da autovettori di f. Se no, spiegare perchè.

   ....

   ....

   b) g è ortogonale rispetto a φ? Spiegare perchè.

   ....

   ....

5. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ che, in base canonica, ha matrice $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

   a) f è unitario rispetto al prodotto Hermitiano standard? SI o NO

   b) Se SI, spiegare perchè. Se NO, dire se può esistere un prodotto Hermitiano φ rispetto al quale f sia unitario.

   ....

   ....

Parte II. *Giustificare la risposta in un foglio. Se a distanza, dopo aver scritto su carta la soluzione in maniera ordinata, caricarne sul form le foto.*

Esercizio 1. Sia $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\varphi(A, B) = tr({}^tAB)$ il prodotto scalare "canonico" su V.

1. Data $M \in V$, dimostrare che l'endomorfismo $f_M : V \to V$ dato da $f_M(A) = MA$ (prodotto righe per colonne) è simmetrico se e solo se la matrice M è simmetrica e che F_M è ortogonale se e solo se M è ortogonale.

2. Sia M simmetrica. Da una base ortonormale di n autovettori per la matrice M ricavare una base ortonormale di n^2 $(= dim(V))$ autovettori per la F_M e dedurre che F_M ha gli stessi autovalori di M con molteplicità moltiplicate per n.