01/04/2019 - *III compitino Geometria (corso A)*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Test [24 punti]. *Per ogni quesito riempire col risultato*

1. In $\mathbb{R}^2$, sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice di un prodotto scalare rispetto alla base canonica. Scrivere una base fatta da vettori isotropi: $\{ \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots \end{pmatrix} \}$

2. Quante sono, a meno di congruenza, le matrici 10×10 simmetriche reali con determinante positivo? ....

3. Nello spazio $\mathbb{R}_2[x]$ considerare il prodotto scalare $\phi(p, q) = p(1)q(1) + p(0)q(0) + p(-1)q(-1)$. Scrivere rispetto alla base canonica la matrice

$$\begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

associata a ϕ. Scrivere la segnatura $(\iota_+, \iota_-, \iota_0)$ di ϕ:................ Sia f l'endomorfismo $f(p(x)) = p(-x)$; f è simmetrico rispetto a ϕ? .... Giustificare la riposta utilizzando (solo) lo spazio assegnato

....

....

4. Calcolare la segnatura $(\iota_+, \iota_-, \iota_0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ della seguente matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Sia $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$. Determinare matrici P e D, con P ortogonale e D diagonale, tali che $P^{-1}BP = D$.

$D =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $P =$

6. Consideriamo la matrice $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & x \\ -2 & -2 & y \\ -1 & 2 & z \end{pmatrix}$

a) Determinare le due terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ per cui la matrice M è ortogonale: ....

b) Si identifichi quale di queste due terne corrisponde ad una matrice M di determinante uguale a 1, e dunque ad una *rotazione*. Scrivere qui la terna: ....

c) Per la matrice identificata al punto precedente si determini un vettore v che genera l'asse di rotazione. Scrivere le coordinate di v:

Parte II *(Scrivere su un foglio)*

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$; per ogni vettore $\underline{a} \equiv (a_0, \ldots, a_3) \in \mathbb{R}^4$ sia $\varphi_{\underline{a}} : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare

$$\varphi_{\underline{a}}(p(x), q(x)) = \sum_{i=0}^{3} a_i p(i) q(i)$$

1. Dimostrare che se $a_i > 0$ allora $\varphi > 0$ [potrebbe essere utile usare che un polinomio di grado ≤ 3 non nullo ha al massimo 3 radici].

2. Sia, per $j \in \{0, \ldots, 3\}$,

$$W_j = \{p(x) \in V : \ p(k) = 0 \ se \ k \in \{0, \ldots, 3\} \setminus \{j\}\}.$$

   Calcolare la dimensione di W_j e una sua base $\mathcal{B}_j$.

3. Dimostrare che $W_i \perp W_j$ per qualunque scelta degli $a_0, \ldots, a_3$ e dedurre che $\cup_{j=0}^{3} \mathcal{B}_j$ è una base ortogonale per qualunque scelta degli a_j.

4. Dedurre dal teorema di Sylvester la segnatura di φ (in dipendenza della scelta dei coefficienti a_j).

5. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo $f(p(x)) = \frac{d}{dx}(p(x))$. Dire (giustificandolo) se esiste $\underline{a}$ con $a_i > 0, i = 0, \ldots, 4$, tale che f risulti un operatore simmetrico in V.