16/12/2019 - *Primo Compitino Geometria (corso A)*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

NOTA: gli studenti con DSA sono esentati dal risolvere l'esercizio 3 della parte I e il punto c) dell'esercizio della seconda parte.

Parte I (24 punti). *Per ogni quesito spuntare la casella o riempire col risultato (dove richiesto)*

1. Scrivere in forma trigonometrica le radici del polinomio $1+z+z^2+z^3+z^4$

   ....

   ....

2. Dato il piano $\pi : x - y + 2z = 1$ ed i punti $P_1 = (1,1,0), P_2 = (2,0,-1)$:

   a) trovare un'equazione parametrica per π

   $(x,y,z) =$ ....

   b) trovare un'equazione parametrica per la retta r passante per P_1 e P_2

   $(x,y,z) =$ ....

   c) dimostrare qui che r è parallela a π:

   ....

   ....

   d) trovare la distanza tra r e π ....

3. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi $V_1 = \mathrm{Span}\{(3,11,5,2),(1,5,2,1),(1,1,1,0)\}$ e $V_2 = \mathrm{Span}\{(1,3,2,2),(1,3,4,1),(2,6,2,5)\}$. Trovare:

   a) la dimensione di V_1 e V_2: $\dim(V_1) =$ .... $\dim(V_2) =$ ....

   b) Dire se $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$: SI☐ NO☐

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si consideri il sottospazio V dello spazio delle matrici 3×3 reali definito da $V = \{M : A \cdot M = 0\}$. Trovare:

   a) una base $\mathcal{B}$ per $\ker(A)$: $\mathcal{B} =$ ....

   b) la dimensione di V: $\dim(V) =$ ....

   c) una base per lo spazio delle matrici simmetriche di V (riempire una o più delle seguenti, se servisse): $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

5. Sia $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$. Trovare:

a) la matrice associata ad f rispetto alla base canonica (in partenza ed arrivo): $\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

b) Dire se f è un isomorfismo : SI NO

c) Se possibile, calcolare $f^{-1}(x, y, z) =$ ....

==

Parte II (12 punti) – si giustifichino in dettaglio su un foglio tutte le risposte.

Esercizio. Siano W_1, W_2 piani distinti passanti per l'origine di $\mathbb{R}^3$ e W_3 una retta passante per l'origine di $\mathbb{R}^3$. Per un fissato $i \in \{1, 2, 3\}$, consideriamo lo spazio degli endomorfismi

$$F_i = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) : \ f(W_i) \subseteq W_i\}.$$

Calcolare (al variare delle posizioni relative dei sottospazi, e giustificando la risposta):

a) $\dim(F_i)$ $\quad , i = 1, 2, 3.$
b) $\dim(F_i \cap F_j)$ $\quad , i, j = 1, 2, 3, \ i < j.$
c) $\dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$.