Anno Accademico 2022/2023
Geometria 1
11/1/2024

Esercizio 1.

a) Calcolare la forma di Jordan della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

b) Calcolare una base di Jordan di $\mathbb{R}^4$ per A.

Soluzione:
a) Il polinomio caratteristico di A è $(1-t)^4$, per cui lo spettro di A è dato dal solo autovalore 1, di molteplicità algebrica 4.
$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2, per cui la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è $\dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = 4 - 2 = 2$ e quindi nella forma di Jordan di A ci sono due blocchi relativi all'autovalore 1.
$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha rango 1, per cui $\dim(\mathrm{Ker}(A-I)^2) = 4 - 1 = 3$, e quindi la forma di Jordan di A sarà composta da un blocco di ordine 1 e un blocco di ordine 3 relativi all'autovalore 1:
$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Scegliamo i sottospazi $U_1, U_2, U_3 \subset \mathbb{R}^4$ tali che:
$\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(A-I)^3 = \mathrm{Ker}(A-I)^2 \oplus U_1$
$\mathrm{Ker}(A-I)^2 = \mathrm{Ker}(A-I) \oplus (A-I)(U_1) \oplus U_2$
$\mathrm{Ker}(A-I) = (A-I)^2(U_1) \oplus (A-I)U_2 \oplus U_3$
Dal punto precedente abbiamo: $U_2 = \{0\}$, $\dim U_1 = \dim U_3 = 1$ e se $U_1 = \mathrm{Span}(\underline{u}_1), U_3 = \mathrm{Span}(\underline{u}_3)$, allora una base di Jordan in cui la matrice è la J al punto a) è data da $\underline{u}_3, (A_I)^2\underline{u}_1, (A-I)\underline{u}_1, \underline{u}_1$.
Direttamente dalle matrici, si nota ad esempio che $e_1 \notin \mathrm{Ker}(A-I)^2$, per cui possiamo prendere $\underline{u}_1 = \underline{e}_1$ ed ottenere $(A-I)\underline{e}_1 = 2\underline{e}_3 + 2\underline{e}_4$, $(A-I)^2\underline{e}_1 = 2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2$.
Delle equazioni cartesiane per $\mathrm{Ker}(A-I)$ sono $t = 2z, y = 2x - z + t$, e $\underline{u}_3$ è una soluzione linearmente idipendente con $2\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2$. Scegliendo ad esempio, $z = 1, x = 0$, otteniamo $\underline{u}_3 = \underline{e}_2\underline{e}_3 + 2\underline{e}_4$.

Esercizio 2. Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ avente come matrice associata rispetto alla base canonica $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) Calcolare la segnatura di φ.

b) Dire quanto vale la dimensione di un sottospazio isotropo massimale, e determinare una base di uno di essi.

c) È vero che ogni vettore isotropo è contenuto in un sottospazio isotropo massimale? (giustificare la risposta).

Soluzione:

a) Usando la bandiera data dalla base $\underline{e}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_3, \underline{e}_4$, i minori principali della matrice associata al prodotto scalare φ hanno determinanti $1, -2, 2$ e 4. La segnatura risulta quindi $(2, 2, 0)$. Alternativamente, il polinoimo caratteristico di A è $t^4 - 6t^2 + 4$ che ha due radici reali positive e due radici reali negative.

b) La dimensione di un sottospazio isotropo massimale è l'indice di Witt, che per prodotti scalari reali non degeneri è il minimo tra l'indice di positività e l'indice di negatività, che in questo caso vale 2.
Direttamente dalla matrice, si nota che $\mathrm{Span}(\underline{e}_1, \underline{e}_4)$ è un sottospazio isotropo massimale.

c) Sì, è vero.
Il vettore nullo è isotropo e contenuto in ogni sottospazio.
Sia $\underline{v}_0 \in \mathbb{R}^4$, $\underline{v}_0 \neq 0$, un vettore isotropo.

Poiché φ è non degenere, esiste $\underline{v}_1 \in \mathbb{R}^4$ tale che $\varphi(\underline{v}_0, \underline{v}_1) \neq 0$. Allora la restrizione di φ a $W = \mathrm{Span}(\underline{v}_0, \underline{v}_1)$ è non degenere di segnatura $(1, 1, 0)$ (la matrice della restrizione nella base $\underline{v}_0, \underline{v}_1$ è del tipo $\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & b \end{bmatrix}$, con $a \neq 0$, ed ha determinante negativo).
Scrivendo $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$, abbiamo che la restrixzione di φ a $W^\perp$ ha segnatura $(1, 1, 0)$ e quindi contiene un vettore isotropo non nullo $\underline{w}_1$. $\mathrm{Span}(\underline{v}_0, \underline{w}_1)$ è quindi un sottospazio isotropo di dimensione 2.

Esercizio 3.

a) Dimostrare che se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è triangolabile e normale allora A è simmetrica.

b) Determinare le $A \in M_n(\mathbb{R})$ triangolabili per cui esiste un intero positivo k tale che $A + A^k = {}^tA$.

Soluzione:

a) Vedendo A come matrice a coefficienti complessi, essa è normale con spettro reale, quindi è Hermitiana, $A = \overline{{}^tA}$. Essendo A a coefficienti reali, $\overline{A} = A$ e quindi A è simmetrica.

b) A è normale, in quanto $A\,{}^tA = A(A + A^k) = (A + A^k)A = {}^tAA$ e quindi simmetrica per il punto a). Allora $A^k = 0$ e A è nilpotente. Ma A è diagonalizzabile per il teorema spettrale, e l'unica matrice nilpotente diagonalizzabile è la matrice nulla.

Esercizio 4. Dire se le matrici $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sono simultaneamente diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ (giustificando la riposta). In caso affermativo determinare una base ortonormale (rispetto al prodotto canonico) di $\mathbb{R}^3$ di autovettori comuni.

Soluzione:
Due matrici sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se sono entrambe diagonalizzabili e commutano.

A e B sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$ in quanto simmetriche ed inoltre $AB = BA = \begin{bmatrix} 12 & 14 & 0 \\ 14 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$,
quindi A e B sono simultaneamente diagonalizzabili.

Il polinomio caratteristico di B è $(1-t)(-1-t)(4-t)$, per cui B ha tre autovalori distinti di molteplicità algebrica 1, e quindi tre autospazi di dimensione 1. Ne segue che una base di autovettori per B è anche una base di autovettori per A.
Un autovettore di B relativo all'autovalore 1 è $\underline{e}_3$.
Un autovettore di B relativo all'autovalore -1 è $2\underline{e}_1 - \underline{e}_2$.
Un autovettore di B relativo all'autovalore 4 è $\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$.
Una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ di autovettori comuni è quindi $e_3, \frac{1}{\sqrt{5}}(2\underline{e}_1 - \underline{e}_2), \frac{1}{\sqrt{5}}(\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2)$.

È sempre vero che due matrici simmetriche reali simultaneamente diagonalizzabili hanno una base ortonormale di autovettori comuni? (giustificare la risposta).

Soluzione:
Sì, è vero.
Dal teorema spettrale, gli autospazi di una matrice simmetrica reale di ordine n decompongono $\mathbb{R}^n$ in somma diretta ortogonale. Basta allora scegliere una base ortonormale in ogni inetrsezione (non nulla) di un autospazio di una e di un autospazio dell'altra.