Soluzioni Scritto Geometria 20/05/2020 (Corso A)

Mattia Puddu
mattiapuddu@icloud.com

20/05/2020

Parte I

1. Dati i punti $P = (2, 3, 1)$ e $Q = (-2, 5, 3)$, determinare:
   (a) Un'equazione parametrica per la retta passante per P e Q;
   (b) Un'equazione per il luogo dei punti equidistanti da P e Q.

Risoluzione (a) Un'equazione parametrica per la retta r passante per P e Q è

$$\begin{aligned} r(t) &= P + t(Q - P) \\ &= (2, 3, 1) + t(-4, 2, 2) \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(b) $R = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è equidistante da P e da Q se e solo se

$$\begin{aligned} & \overline{RP} = \overline{RQ} \\ \Leftrightarrow \quad & \overline{RP}^2 = \overline{RQ}^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = (x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = (x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 6z + 9 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x - y - z + 6 = 0 \end{aligned}$$

Il luogo dei punti equidistanti da P e Q è un piano, ortogonale alla retta per P e Q, avente equazione cartesiana $2x - y - z + 6 = 0$.

✓

2. Per ciascuno dei seguenti insiemi X si dica se X è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V} = \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ e in caso affermativo se ne determini la dimensione:
   (a) $X_1 = \left\{\mathcal{A} \in \mathbb{V} : \mathcal{A}^2 = 0\right\}$;
   (b) $X_2 = \{\mathcal{A} \in \mathbb{V} : \mathcal{MAM} = 0\}$, dove

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione (a) X_1 non è uno spazio vettoriale, in quanto non è chiuso rispetto alla somma. Ad esempio, è facile vedere che

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$$

ma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

(b) X_2 è uno spazio vettoriale: chiaramente $0 \in X_2$, e X_2 è chiuso rispetto al prodotto per scalari; inoltre, se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in X_2$ allora

$$\mathcal{M}(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{M} = \mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M} + \mathcal{M}\mathcal{B}\mathcal{M} = 0 + 0 = 0,$$

dunque $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in X_2$ e X_2 è chiuso anche rispetto alla somma. Proviamo ora che la dimensione è $\dim X_2 = 15$. Sia

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C^1 & C^2 & C^3 & C^4 \end{array} \right) \in X_2$$

un generico elemento di X_2, dove abbiamo denotato con C^1, C^2, C^3, C^4 le colonne di $\mathcal{A}$. Dato che le colonne di $\mathcal{A}\mathcal{M}$ sono tutte uguali a $C^1 + C^2 + C^3 + C^4$, abbiamo che $\mathcal{A} \in X_2$ se e solo se $C^1 + C^2 + C^3 + C^4 \in \operatorname{Ker}(\mathcal{M})$. Facendo il conto, si vede subito che ciò si traduce nella richiesta che la somma di tutte le entrate della matrice sia nulla. Abbiamo dunque 15 parametri liberi, e $\dim X_2 = 15$.

✓

3. Sia

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1-\imath & -1-\imath \\ 1+\imath & 3 & 0 \\ -1+\imath & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare gli autovalori di M e le loro rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

(b) Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: *dati due autovettori v_1, v_2 di M, questi sono o proporzionali o ortogonali rispetto al prodotto hermitiano canonico.*

Risoluzione (a) Calcoliamo il polinomio caratteristico di M con la formula di Laplace usando la terza riga:

$$\begin{aligned} p_M(t) &= \det(M - t\mathcal{I}_3) \\ &= (-1+\imath)(1+\imath)(3-t) + (3-t)\Big[(6-t)(3-t) - (1+\imath)(1-\imath)\Big] \\ &= (3-t)\Big[-2 + (6-t)(3-t) - 2\Big] \\ &= (3-t)(t^2 - 9t + 14) \\ &= -(t-3)(t-7)(t-2) \end{aligned}$$

Di conseguenza, gli autovalori e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche sono

Autovalore	Molteplicità algebrica	Molteplicità geometrica
2	1	1
3	1	1
7	1	1

dove per il calcolo della molteplicità geometrica si è usato il fatto che quest'ultima è sempre compresa tra 1 e la molteplicità algebrica.

(b) Essendo M una matrice hermitiana, l'affermazione è vera.

✓

4. Sia dato il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) & \mapsto & -x_1y_2 + x_1z_2 - y_1x_2 + y_1z_2 + z_1x_2 + z_1y_2 \end{array}$$

(a) Scrivere la matrice associata a φ rispetto alla base canonica;

(b) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a φ;

(c) Dedurre la segnatura di φ.

Risoluzione (a) Con semplici conti, si vede che la matrice cercata è

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Applichiamo ad esempio l'algoritmo di Lagrange alla base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ (un modo alternativo di procedere è di cercare prima una base di autovettori per $\mathcal{M}$ e ortogonalizzare quest'ultima, con in questo caso il vantaggio che autovettori per $\mathcal{M}$ relativi ad autovalori distinti sono già ortogonali): essendo tutti i vettori di tale base isotropi, e poiché $\varphi(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = -2$, come prima cosa sostituiamo e_1 con $e_1 + e_2$: e applichiamo Lagrange alla base $\mathcal{B}' = \{e_1 + e_2, e_2, e_3\}$: con le sostituzioni

$$e_2 \to 2e_2 - \frac{2\varphi(e_1 + e_2, e_2)}{\varphi(e_1 + e_2, e_1 + e_2)}(e_1 + e_2) = 2e_2 - (e_1 + e_2) = e_2 - e_1$$

$$e_3 \to e_3 - \frac{\varphi(e_1 + e_2, e_3)}{\varphi(e_1 + e_2, e_1 + e_2)}(e_1 + e_2) = e_3 + e_1 + e_2$$

si ottiene la base $\mathcal{B}'' = \{e_1 + e_2, e_2 - e_1, e_1 + e_2 + e_3\}$ in cui il primo vettore è sicuramente ortogonale agli altri due, e dato che

$$\varphi(e_2 - e_1, e_1 + e_2 + e_3) = 0$$

B'' è una base ortogonale rispetto a φ. Infine, osserviamo che

$$\begin{aligned} \varphi(e_2 - e_1, e_2 - e_1) &= 2 \\ \varphi(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3) &= 2 \end{aligned}$$

(c) Per quando visto al punto precedente, la matrice associata a φ rispetto alla base $\mathcal{B}''$ è

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e dunque la segnatura è $\sigma = (2, 1, 0)$.

✓

5. Sia $\mathcal{A}_k$ una matrice 3×3 simmetrica reale, tale che

$$\mathcal{A}_k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A}_k \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un numero reale dato.

(a) Quali sono i possibili valori di k?

(b) Fissato uno tra i possibili valori di k, si dia un esempio di $\mathcal{A}_k$ con autovalore 3.

Risoluzione (a) Per le due condizioni date, $(1, 2, 2)$ e $(k, -1, 2)$ sono autovettori per $\mathcal{A}_k$ relativi, rispettivamente, agli autovalori $2, 1$. Essendo gli autovalori distinti, ed essendo $\mathcal{A}_k$ reale e simmetrica, tali autovettori sono ortogonali rispetto al prodotto scalare determinato da $\mathcal{A}_k$. In altri termini, k deve soddisfare la condizione

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathcal{A}_k \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = k - 2 + 4 = k + 2$$

e dunque l'unico valore possibile per k è -2.

(b) Determiniamo una base ortonormale di autovettori per $\mathcal{A}_{-2} = \mathcal{A}$: osserviamo che una base di autovettori sarà automaticamente ortogonale, essendo i vari autospazi tutti di dimensione 1. Un generico autovettore $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ per $\mathcal{A}$ relativo all'autovalore 3 deve essere ortogonale ai vettori $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$: di conseguenza si deve avere

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = -2y - 2z \end{cases}$$

Scegliendo $z = 1$ si trova che un autovettore per $\mathcal{A}$ relativo all'autovalore 3 è $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. A questo punto è facile vedere che

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base ortonormale di autovettori per $\mathcal{A}$. Una matrice che verifica tutte le proprietà richieste è

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

✓

Parte II

Sia $\mathbb{V} = \mathbb{R}_3[x]$, e siano

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_+ &= \{p(x) \in \mathbb{V} : p(1) = p(2) = 0\}\\ \mathbb{U}_- &= \{p(x) \in \mathbb{V} : p(-1) = p(-2) = 0\}\end{aligned}$$

(a) Dimostrare che $\mathbb{V} = \mathbb{U}_+ \oplus \mathbb{U}_-$;

(b) Sia dato il prodotto scalare su $\mathbb{V}$

$$\begin{aligned}\varphi : \quad \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\to \mathbb{R}\\ (p(x), q(x)) &\mapsto p(-2)q(-2) + p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(2)q(2)\end{aligned}$$

Dimostrare che φ è definito positivo, e che $\mathbb{U}_+$ è ortogonale a $\mathbb{U}_-$. Determinare una base ortogonale per $\mathbb{U}_+$ e una base ortogonale per $\mathbb{U}_-$;

(c) Fissati due parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri l'endomorfismo di V

$$\begin{aligned}f_{a,b} : \quad V &\to V\\ p(x) &\mapsto p(ax + b)\end{aligned}$$

Determinare per quali valori di a e b l'operatore $f_{a,b}$ è ortogonale rispetto a φ.

Risoluzione (a) Osserviamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_+ &= \{(x-1)(x-2)(ax+b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(x(x-1)(x-2), (x-1)(x-2))\\ \mathbb{U}_- &= \{(x+1)(x+2)(ax+b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Span}(x(x+1)(x+2), (x+1)(x+2))\end{aligned}$$

e che i generatori per $\mathbb{U}_+$ e $\mathbb{U}_-$ sono linearmente indipendenti, dunque $\dim \mathbb{U}_+ = \dim \mathbb{U}_- = 2$. Inoltre osserviamo che $\mathbb{U}_+ \cap \mathbb{U}_- = \{0\}$: se $p(x) \in \mathbb{U}_+ \cap \mathbb{U}_-$ allora ha almeno le quattro radici distinte $1, -1, 2, -2$. Dato che $p(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale a 3, deve essere necessariamente il polinomio nullo. Dunque $\mathbb{U}_+$ e $\mathbb{U}_-$ sono in somma diretta. Per la formula di Grassmann,

$$\dim(\mathbb{U}_+ \oplus \mathbb{U}_-) = \dim \mathbb{U}_+ + \dim \mathbb{U}_- = 4,$$

e poiché $\dim \mathbb{V} = 4$ si ha l'uguaglianza $\mathbb{U}_+ \oplus \mathbb{U}_- = \mathbb{V}$.

(b) Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{(x+2)(x-2)(x+1), (x+2)(x+1)(x-1), (x+2)(x-2)(x-1), (x+1)(x-1)(x-2)\}\\ &= \left\{(x^2-4)(x+1), (x^2-1)(x+2), (x^2-4)(x-1), (x^2-1)(x-2)\right\}\\ &= \left\{x^3 + x^2 - 4x - 4, x^3 + 2x^2 - x - 2, x^3 - x^2 - 4x + 4, x^3 - 2x^2 - x + 2\right\}\end{aligned}$$

è una base di $\mathbb{V}$ e che

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 144 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 36 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 144\end{pmatrix}$$

In particolare, si ricava subito che φ è definito positivo. Inoltre, poiché

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_+ &= \{(x+2)(x-2)(x-1), (x+1)(x-1)(x-2)\} \subset \mathbb{U}_+\\ \mathcal{B}_- &= \{(x+2)(x-2)(x+1), (x+2)((x+1)(x-1)\} \subset \mathbb{U}_-\end{aligned}$$

si ha subito che $\mathcal{B}_+$ e $\mathcal{B}_-$ sono una base ortogonale per $\mathcal{U}_+$ e $\mathcal{U}_-$, rispettivamente, e che $\mathbb{U}_+$ e $\mathbb{U}_-$ sono ortogonali.

(c) Per definizione, $f_{a,b}$ è ortogonale a φ se e solo se preserva il prodotto scalare, ovvero

$$\varphi\Big(f_{a,b}\big(p(x)\big), f_{a,b}\big(q(x)\big)\Big) = \varphi(p(x), q(x)) \qquad \forall p(x), q(x) \in \mathbb{V}$$

Prendendo ad esempio $p(x) = 1$, $q(x) = x$ la condizione data diventa

$$\begin{aligned} & \varphi(1, ax+b) = \varphi(1, x) \\ \Leftrightarrow\quad & (-2a+b) + (-a+b) + (a+b) + (2a+b) = -2-1+1+2 \\ \Leftrightarrow\quad & 4b = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & b = 0 \end{aligned}$$

Se invece prendiamo $p(x) = 1$, $q(x) = x^2$ la condizione data diventa, usando anche la condizione $b = 0$,

$$\begin{aligned} & \varphi\big(1, (ax+b)^2\big) = \varphi(1, x^2) \\ \Leftrightarrow\quad & (-2a)^2 + (-a)^2 + (a)^2 + (2a)^2 = 4+1+1+4 \\ \Leftrightarrow\quad & 10a^2 = 10 \\ \Leftrightarrow\quad & a = 1 \vee a = -1 \end{aligned}$$

Ci sono dunque due soli possibili endomorfismi ortogonali: $f_{1,0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$ e

$$f = f_{-1,0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \to & \mathbb{V} \\ p(x) & \mapsto & p(-x) \end{array}.$$

Le condizioni precedenti sono a priori solo necessarie: bisogna verificare che gli endomorfismi trovati siano effettivamente ortogonali rispetto a φ. Tale verifica è però immediata: l'identità preserva sicuramente il prodotto scalare, mentre per f la tesi è una conseguenza del modo in cui è definito il prodotto scalare: per ogni $p(x), q(x) \in \mathbb{V}$

$$\begin{aligned} \varphi(f(p(x)), f(q(x)) &= \varphi(p(-x), q(-x)) \\ &= p(2)q(2) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(-2)q(-2) \\ &= \varphi(p(x), q(x)) \end{aligned}$$

✓