Soluzioni Scritto Geometria 12/06/2020 (Corso A)

Mattia Puddu
mattiapuddu@icloud.com

11/06/2020

Parte I

1. Consideriamo le due rette r_1, r_2, di equazioni cartesiane

$$r_1 : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \qquad\qquad r_2 : \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases}$$

   (a) Trovare un'equazione parametrica per r_2;

   (b) Le due rette date sono parallele, incidenti o sghembe?

Risoluzione (a) Osserviamo che

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y+2z=0 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases} \overset{Eq.2-Eq.1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3y=1 \\ 2x-y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y={}^1\!/_3 \\ x={}^2\!/_3-z \end{cases}$$

Di conseguenza, un'equazione parametrica per la retta r_2 è data da

$$r_2(t) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + t\,(-1,0,1) = \left(\frac{2}{3}-t, \frac{1}{3}, t\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(b) In modo analogo al punto precedente si trova che un'equazione parametrica per r_1 è

$$r_1(s) = s\,(1,-2,1) \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Dato che $(-1,0,1) \notin \operatorname{Span}((1,-2,1))$, le rette non sono parallele. Se le rette fossero incidenti esisterebbero $s,t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} s=\frac{2}{3}-t \\ -2s=\frac{1}{3} \\ s=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-\frac{1}{6} \\ t=-\frac{1}{6} \\ s+t=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Poiché tale sistema non ha soluzione, le due rette sono sghembe.

✓

2. Detto π un piano in $\mathbb{R}^3$, sia $f_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito dalla riflessione ortogonale rispetto a π.

(a) Dato il piano $\pi_1 : x + y + z = 0$, scrivere la matrice associata a f_{π_1} rispetto alla base canonica;

(b) Dato il piano $\pi_2 : x - y = 0$ dire se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_3$ i cui elementi siano contemporaneamente autovettori per f_{π_1} e f_{π_2}. Nel caso in cui una tale base esista, esplicitarne una.

Risoluzione Denotiamo con $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e dotiamo quest'ultimo del prodotto scalare canonico.

(a)(b) Risolviamo i due punti dell'esercizio contemporaneamente. Osserviamo che

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \operatorname{Span}((1, 1, -2)),$$

dunque in particolare $(1, 1, -2)$ è autovettore sia per f_{π_1} sia per f_{π_2} relativo all'autovalore 1. Si verifica facilmente che $\mathcal{B}' = \{(1, 1, -2), (1, -1, 0)\}$ è una base ortogonale di π_1, e che un suo completamento a una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, -2), (1, -1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Similmente, si verifica facilmente che $\mathcal{D}' = \{(1, 1, -2), (1, 1, 1)\}$ è una base ortogonale di π_2 e che un suo completamento a una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ è

$$\mathcal{D} = \{(1, 1, -2), (1, 1, 1), (1, -1, 0)\}.$$

Le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ sono costituite dagli stessi vettori: dunque $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ i cui elementi sono autovettori per f_{π_1} e f_{π_2} contemporaneamente. Infine, poiché

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_{\pi_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si ricava

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f_{\pi_1}) &= \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\,\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f_{\pi_1})\,\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

✓

3. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ consideriamo la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 3-a & -a & 1 \\ a-1 & 2+a & -1 \\ 1+a & a & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare gli autovalori di M_a, determinandone la molteplicità algebrica e geometrica al variare di $a \in \mathbb{R}$;

(b) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice M_a è simile a

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Per $a = 1$ trovare una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ tale che $P^{-1} M_a P$ sia triangolare superiore.

Risoluzione (a) Si verifica facilmente che il polinomio caratteristico di M_a è

$$p_{M_a}(t) = -t^3 + 8t^2 - 20t + 16 = -(t-2)^2(t-4)$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$. In particolare p_{M_a} (e dunque gli autovalori di M_a e le loro molteplicità algebriche) non dipendono dal parametro:

$$\mu_a(2) = 2, \qquad \mu_a(4) = 1 \qquad\qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo le molteplicità geometriche: dato che la molteplicità geometrica di un autovalore è sempre minore o uguale a quella algebrica, si ricava immediatamente

$$\mu_g(4) = 1 \qquad\qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Invece,

$$\mu_g(2) = \dim \operatorname{Ker}(M_a - 2\mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rk}(M_a - 2\mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1-a & -a & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ 1+a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Il minore di $M_a - 2\mathrm{Id}$ ottenuto sopprimendo la prima riga e la prima colonna ha determinante $2a$: di conseguenza se $a \neq 0$, tale minore è invertibile, $M_a - 2\mathrm{Id}$ ha rango 2, e $\mu_g(2) = 1$. Se invece $a = 0$, si verifica facilmente che $M_a - 2\mathrm{Id}$ ha rango 1, e $\mu_g(2) = 2$. In definitiva,

$$\mu_g(2) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

In particolare, M_a è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$.

(b) La matrice N data ha gli stessi autovalori di M_a, e si verifica immediatamente che $\mu_g(2) = \mu_a(2) = 2$, $\mu_g(4) = \mu_a(4) = 1$. In particolare, N è diagonalizzabile. Per quanto osservato al punto precedente, l'unico valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui M_a e N sono simili è $a = 0$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ è M_1. Siano v, w autovettori per f relativi, rispettivamente, agli autovalori 2 e 4 : essendo v e w autovettori relativi ad autovalori distinti, sono necessariamente indipendenti; possiamo dunque completarli a una base $\mathcal{B} = \{v, w, z\}$ di $\mathbb{R}^3$. Per costruzione esistono $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Poiché

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{-1} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

per concludere basta calcolare $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Scegliamo a questo punto una base $\mathcal{B}$ esplicita: si verifica facilmente che gli autospazi per $\mathcal{M}_1$ sono

$$\mathcal{V}_2 = \mathrm{Span}((-1, 1, 1)) \qquad \mathcal{V}_4 = \mathrm{Span}((1, -1, 1))$$

e che $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 0, 0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Una matrice P con la proprietà richiesta è

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

✓

4. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia dato il prodotto scalare

$$\begin{array}{rccl} \varphi_k : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) & \mapsto & x_1y_1 + kx_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 - 2x_3y_3. \end{array}$$

(a) Scrivere la matrice associata a φ_k rispetto alla base canonica;

(b) Trovare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la segnatura di φ_k è $(1,1,1)$

(c) Per $k = 2$ trovare una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a φ_k.

Risoluzione Denotiamo con $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Con semplici calcoli, si trova

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Per il punto precedente, $\varphi_{k|\mathrm{Span}(e_1)}$ è definito positivo, mentre $\varphi_{k|\mathrm{Span}(e_3)}$ è definito negativo per ogni $k \in \mathbb{R}$. Di conseguenza

$$\imath_+(\varphi_k) \geq 1, \qquad \imath_-(\varphi_k) \geq 1 \qquad \forall k \in \mathbb{R},$$

e per concludere è sufficiente trovare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi_k)$ non è invertibile. Poiché

$$\det \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi_k) = -2k - 1,$$

si ricava immediatamente che l'unico valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui la segnatura di φ_k è $(1,1,1)$ è $k = -1/2$.

(c) Per $k = 2$ si ha

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

e in particolare e_1 è ortogonale a e_2, e_3. Per concludere, basta ortogonalizzare e_3 rispetto ad e_2 :

$$e_3 \to e_3 - \frac{\varphi_2(e_2, e_3)}{\varphi_2(e_2, e_2)} e_2 = e_3 + \frac{1}{2} e_2$$

Una base di $\mathbb{R}^3$ ortogonale rispetto a φ_2 è

$$\mathcal{B} = \left\{ e_1, e_2, e_3 + \frac{1}{2} e_2 \right\} = \left\{ (1,0,0), (0,1,0), \left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \right\}$$

✓

Parte II

Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{C} = \{E^{1,1},\ E^{1,2},\ E^{2,1},\ E^{2,2}\}$ la base di $\mathbb{V} = \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ formata, al variare di $i, j = 1, 2$, dalle matrici $E^{i,j}$ aventi un 1 in posizione (i, j) e 0 altrove. Dati due endomorfismi $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aventi matrici associate (rispetto a $\mathcal{B}$) rispettivamente $A = (a_{r,s})$ e $B = (b_{r',s'})$ sia $F = F(f, g)$ l'endomorfismo di $\mathbb{V}$ definito da

$$F(E^{i,j}) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{h=1}^{2} a_{k,i} b_{h,j} E^{k,h} \tag{1}$$

(a) Scrivere esplicitamente la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(F)$ associata ad F rispetto alla base $\mathcal{C}$;

(b) Sia dato il prodotto scalare

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\to \mathbb{R} \\ (M, N) &\mapsto \operatorname{Tr}(M^t N) \end{aligned}$$

Dimostrare che se f, g sono simmetrici rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$ allora F è simmetrico rispetto a ψ;

(c) Dimostrare che se f, g sono ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$ allora F è ortogonale rispetto a ψ.

Risoluzione 1. Le relazioni (1) esprimono esattamente come F agisce sulla base di $\mathbb{V}$ data. Si verifica facilmente che

$$K = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} \\ a_{1,1}b_{2,1} & a_{1,1}b_{2,2} & a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} & a_{2,1}b_{1,2} & a_{2,2}b_{1,1} & a_{2,2}b_{1,2} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,1}b_{2,2} & a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ \hline a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{array}\right)$$

2. Per ipotesi f, g sono simmetrici rispetto al prodotto scalare canonico: usando le matrici associate rispetto a $\mathcal{B}$ questo equivale ad affermare che A, B sono matrici simmetriche. Sia S la matrice associata a ψ rispetto alla base $\mathcal{C}$: con semplici calcoli si verifica che

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_4}$$

F è simmetrico rispetto a ψ se e solo se

$$\begin{aligned} & \psi(F(X), Y) = \psi(X, F(Y)) && \forall X, Y \in \mathbb{V} \\ \Leftrightarrow\ & [X]_{\mathcal{C}}^t K^t S [Y]_{\mathcal{C}} = [X]_{\mathcal{C}}^t S K [Y]_{\mathcal{C}} && \forall X, Y \in \mathbb{V} \\ \Leftrightarrow\ & K^t S = S K \\ \Leftrightarrow\ & K^t = K \end{aligned}$$

Dato che A e B sono simmetriche,

$$K^t = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ \hline a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{array}\right)^t = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1}B^t & a_{2,1}B^t \\ \hline a_{1,2}B^t & a_{2,2}B^t \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1}B & a_{2,1}B \\ \hline a_{1,2}B & a_{2,2}B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ \hline a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{array}\right) = K,$$

dunque l'ultima condizione è verificata, ed F è simmetrico rispetto a ψ.

3. Per ipotesi f, g sono ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico: usando le matrici associate rispetto a $\mathcal{B}$ questo equivale ad affermare che A, B sono matrici ortogonali; in particolare valgono le seguenti relazioni sui coefficienti di A :

$$\begin{cases} a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2 = 1 \\ a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2} = 0 \\ a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

F è ortogonale rispetto a ψ se e solo se

$$
\begin{aligned}
& \psi(F(X), F(Y)) = \psi(X, Y) && \forall X, Y \in \mathbb{V} \\
\Leftrightarrow\quad & [X]_{\mathcal{C}}^t K^t S K [Y]_{\mathcal{C}} = [X]_{\mathcal{C}}^t S [Y]_{\mathcal{C}} && \forall X, Y \in \mathbb{V} \\
\Leftrightarrow\quad & K^t S K = S \\
\Leftrightarrow\quad & K^t K = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_4}.
\end{aligned}
$$

Dato che A, B sono ortogonali (più precisamente, usando l'identità $B^t B = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2}$ e le relazioni (2))

$$
\begin{aligned}
K^t K &= \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1}B^t & a_{2,1}B^t \\ \hline a_{1,2}B^t & a_{2,2}B^t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ \hline a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} (a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2)B^t B & (a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2})B^t B \\ \hline (a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1})B^t B & (a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2)B^t B \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 1 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2} & 0 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \\ 0 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} & 1 \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \end{array}\right) \\
&= \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4},
\end{aligned}
$$

dunque l'ultima condizione è verificata, ed F è ortogonale rispetto a ψ.

✓