Soluzioni Scritto Geometria 10/07/2020 (Corso A)

Mattia Puddu
mattiapuddu@icloud.com

09/07/2020

Parte I

1. Determinare per quali valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ le rette

$$r_1 : \begin{cases} -x + ky - z = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : (x, y, z) = (2t, 1 - kt, 2kt) \quad (t \in \mathbb{R})$$

sono incidenti, sghembe, parallele.

Risoluzione Scriviamo le rette date in forma parametrica, mettendo in evidenza i vettori direzione:

$$\begin{aligned} r_1 : (x, y, z) &= (-1, 0, 1) + y\,(1, 1, k-1) \qquad (y \in \mathbb{R}) \\ r_2 : (x, y, z) &= (0, 1, 0) + t\,(2, -k, 2k) \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Per quanto appena scritto, dato che $(1, 1, k-1) \neq (2, -k, 2k)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, le due rette non sono mai parallele. Le due rette sono incidenti se e solo se esistono $y, t \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} -1 + y = 2t \\ y = 1 - kt \\ 1 + (k-1)y = 2kt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ k & 1 \\ 2k & 1-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dato che

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ k & 1 & 1 \\ 2k & 1-k & 1 \end{pmatrix} = -k(k+2)$$

per Rouché-Capelli abbiamo tre casi:

$k \neq 0, -2$) In tal caso, il sistema non ha soluzione, e le rette sono sghembe.

$k = 0$) In tal caso, si verifica facilmente che $(0, 1)$ è soluzione del sistema, e le due rette sono incidenti.

$k = -2$) In tal caso, si verifica facilmente che $(-1, -1)$ è soluzione del sistema, e le due rette sono incidenti.

✓

2. Dati i vettori $v = (1, 1, 1)$ e $w = (0, -1, 1)$, sia $\mathbb{W}$ l'insieme degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = f(w) = 0$.

   a) Dire se $\mathbb{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ e, in caso affermativo, calcolarne la dimensione.

   b) Scrivere la matrice associata all'operatore $g \in \mathbb{W}$ tale che $g(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, rispetto alla base canonica.

Risoluzione a) Si verifica facilmente che $\mathbb{W}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$: calcoliamone la dimensione. Prendiamo come base di $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{v, w, (1, 0, 0)\}$$

e osserviamo che per ogni $f \in \mathbb{W}$, dato che $f(v) = f(w) = 0$ esistono (e sono determinati univocamente da f) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Poiché questo vale per ogni $f \in \mathbb{W}$, deduciamo che $\dim \mathbb{W} = 3$.

b) Per quanto visto al punto precedente,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza, detta $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(g) &= \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

✓

3. Calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Risoluzione Osserviamo che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \overset{C_4-C_3}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_3-C_2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{C_2-C_1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo a questo punto concludere facilmente usando Laplace sulla prima colonna (i primi tre termini sono nulli, in quanto sopprimendo la prima, la seconda, la terza riga e la prima colonna il minore che si ottiene ha sempre una riga nulla):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -5 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -5 \cdot 2 = -10.$$

✓

4. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia

$$\mathcal{M}_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori di $\mathcal{M}_3$, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

b) Trovare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\mathcal{M}_k$ sia diagonalizzabile.

c) Trovare una matrice ortogonale $\mathcal{P} \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ e una matrice diagonale $\mathcal{D} \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ tali che $\mathcal{P}^{-1} M_0 \mathcal{P} = \mathcal{D}$

Risoluzione Osserviamo che la terza riga di $\mathcal{M}_k$ è la somma delle prime due per ogni $k \in \mathbb{R}$ dunque $\mathcal{M}_k$ non ha mai rango massimo e 0 è un autovalore per $\mathcal{M}_k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. Calcoliamo il polinomio caratteristico di $\mathcal{M}_k$:

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{M}_k}(\lambda) = \det\left(\mathcal{M}_k - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & k & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & k+1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda) - k - 1\right] + k - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda - k\right) + k \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - k - \lambda^3 + 3\lambda^2 + k\lambda + k \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - k) \\ &= -\lambda\left(\lambda - 2 + \sqrt{k+1}\right)\left(\lambda - 2 - \sqrt{k+1}\right) \end{aligned}$$

a) Per $k = 3$,

$$p_{\mathcal{M}_3}(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 4)$$

dunque gli autovalori per $\mathcal{M}_3$ sono $0, 4$, e le rispettive molteplicità algebriche sono $2, 1$. Inoltre dato che $\mathcal{M}_3$ ha rango 2, la molteplicità geometrica di 0 è 1, e poiché la molteplicità geometrica di un autovalore è sempre minore o uguale alla rispettiva molteplicità algebrica, la molteplicità geometrica di 4 è uguale a 1.

λ	μ_a	μ_g
0	2	1
4	1	1

b) Le radici del polinomio caratteristico di $\mathcal{M}_k$ sono 0, $2 + \sqrt{k+1}$, $2 - \sqrt{k+1}$.

Diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$

Se $k < -1$ ci sono due autovalori non reali, e $\mathcal{M}_k$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Se i tre autovalori sono distinti, $\mathcal{M}_k$ è certamente diagonalizzabile. Vediamo per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ almeno due autovalori sono uguali:

$0 = 2 + \sqrt{k+1}$ Impossibile.

$0 = 2 - \sqrt{k+1}$ $\Rightarrow$ $k = 3$. Per il punto precedente, $\mathcal{M}_3$ non è diagonalizzabile.

$2 + \sqrt{k+1} = 2 - \sqrt{k+1} \quad \Rightarrow \; k = -1$. In tal caso,

$$p_{\mathcal{M}_{-1}}(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2.$$

Dato che $\mathcal{M}_{-1} - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ha rango 2, la molteplicità geometrica di 2 è 1, e $\mathcal{M}_{-1}$ non è diagonalizzabile.

Di conseguenza, $\mathcal{M}_k$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $k > -1$, $k \neq 3$.

Diagonalizzabilità su $\mathbb{C}$ — In questo caso, possiamo considerare anche i valori di k minori di -1, e anche per quanto visto nel punto precedente $\mathcal{M}_k$ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ se e solo se $k \neq -1, 3$.

c) Per il punto precedente, la matrice $\mathcal{M}_0$ è diagonalizzabile e gli autovalori sono $0, 1, 3$, dunque possiamo prendere

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e $\mathcal{P}$ una matrice avente come vettori colonna degli autovettori per $\mathcal{M}_0$ relativi a $0, 1, 3$ di norma unitaria (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$). Calcoliamo questi autovettori.

$\lambda = 0)$ Per l'osservazione iniziale, e grazie al fatto che $\mathcal{M}_0$ è simmetrica, si ricava immediatamente $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{M}_0) = \mathrm{Span}\,((1, 1, -1))$

$\lambda = 1)$ È facile osservare che

$$\mathrm{Ker}\,(\mathcal{M}_0 - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\,((1, -1, 0))$$

$\lambda = 3)$ È facile osservare che

$$\mathrm{Ker}\,(\mathcal{M}_0 - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\,((1, 1, 2))$$

Una volta normalizzati gli autovettori scritti, basta prendere

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & -3\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

✓

5. Consideriamo il prodotto scalare

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) & \mapsto & 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_3 \end{array}$$

a) Scrivere la matrice associata a φ rispetto alla base canonica.

b) Trovare la segnatura di φ.

c) Trovare un sottospazio isotropo (rispetto a φ) di $\mathbb{R}^3$ di dimensione massima.

Risoluzione Denotiamo con $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Con semplici calcoli, si trova

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Osserviamo che il determinante della matrice calcolata al punto precedente è -6, dunque quest'ultima è invertibile e $\imath_0 = 0$. Inoltre, è facile osservare che i due sottospazi $\mathbb{V}_1 = \operatorname{Span}(e_1)$, $\mathbb{V}_2 = \operatorname{Span}(e_2, e_3)$ sono ortogonali, e $\varphi_{|\mathbb{V}_2}$, $\varphi_{|\mathbb{V}_1}$ hanno segnatura, rispettivamente, $(1, 0, 0)$, $(1, -1, 0)$ dunque $\sigma(\varphi) = (2, 1, 0)$.

Soluzione alternativa Osserviamo che il polinomio caratteristico di $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ è

$$p_{\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(\varphi)} = (2 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 - 4] = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

dunque ci sono due autovalori positivi e un autovalore negativo, e $\sigma(\varphi) = (2, 1, 0)$.

c) Ricordiamo che un sottospazio $\mathbb{W}$ si dice isotropo se $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}^\perp$. Dato che il prodotto scalare φ è non degenere,

$$\dim \mathbb{W}^\perp = 3 - \dim \mathbb{W}.$$

Di conseguenza, dato che $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}^\perp$,

$$\dim \mathbb{W} \leq \dim \mathbb{W}^\perp = 3 - \dim \mathbb{W}$$

da cui si ricava la disuguaglianza $\dim \mathbb{W} \leq 1$. Proviamo che esiste un sottospazio isotropo di dimensione 1 : per esibirne uno, basta trovare un vettore isotropo non nullo $w \in \mathbb{R}^3$ e considerare $\mathbb{W} = \operatorname{Span}(w)$. Cerchiamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $w = ae_2 + be_3$ sia isotropo:

$$0 = \varphi(w, w) = a^2\varphi(e_2, e_2) + 2ab\varphi(e_2, e_3) + b^2\varphi(e_3, e_3) = a^2 + 4ab + b^2$$

e tale relazione è verificata, ad esempio, prendendo $a = 1$, $b = -2 + \sqrt{3}$. Dunque un sottospazio isotropo di dimensione massima è

$$\mathbb{W} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$$

✓

Parte II

Siano date le matrici hermitiane

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Siano inoltre $\psi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ il prodotto hermitiano canonico di $\mathbb{C}^2$, e $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$.

1. a) Calcolare una base ortonormale (rispetto a ψ) di autovettori per σ_x. Similmente, calcolare una base di autovettori per σ_y, σ_z.

1. b) Dedurre che nessuna coppia di matrici tra σ_x, σ_y, σ_z può essere simultaneamente diagonalizzata.

2. Sia $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ un vettore unitario (cioè di norma 1 rispetto a φ). Sia

$$\sigma_{\underline{n}} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}).$$

a) Calcolare gli autovalori di $\sigma_{\underline{n}}$.

b) Calcolare una base ortonormale di autovettori per $\sigma_{\underline{n}}$ (rispetto a φ).

3. Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ chiamiamo commutatore di A, B la matrice

$$[A, B] = AB - BA.$$

Calcolare i tre commutatori

$$[\sigma_x, \sigma_y] \qquad [\sigma_y, \sigma_z] \qquad [\sigma_z, \sigma_x]$$

4. Dati $\underline{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $\underline{n'} = (n'_x, n'_y, n'_z) \in \mathbb{R}^3$ unitari, dimostrare che

$$[\sigma_{\underline{n}}, \sigma_{\underline{n'}}] = 2\imath\ \sigma_{\underline{n}\times\underline{n'}}$$

(dove $\underline{n} \times \underline{n'}$ è il prodotto vettoriale di $\underline{n}$, $\underline{n'}$).

Risoluzione a) Si verifica facilmente che σ_x, σ_y, σ_z hanno tutte autovalori distinti $1, -1$, e in particolare sono tutte diagonalizzabili.

$\underline{\sigma_x}$ Si verifica facilmente che una base ortonormale di autovettori per σ_x è

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{\sigma_y}$ Si verifica facilmente che una base ortonormale di autovettori per σ_x è

$$\mathcal{B}_y = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\imath\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\imath\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\underline{\sigma_z}$ Dato che σ_z è diagonale, una base ortonormale di autovettori per σ_z è $\mathcal{B}_z = \{e_1, e_2\}$

1. b) Se due matrici diagonalizzabili sono simultaneamente diagonalizzabili, queste hanno almeno un autovettore in comune. Per il punto precedente, nessuna coppia di matrici tra σ_x, σ_y, σ_z può essere simultaneamente diagonalizzata.

2. a) Per costruzione

$$\sigma_{\underline{n}} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - \imath n_y \\ n_x + \imath n_y & -n_z \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $\sigma_{\underline{n}}$: ricordando che $\underline{n} \in \mathbb{R}^3$ è unitario, $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ e

$$\begin{aligned} p_{\sigma_{\underline{n}}}(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} n_z - \lambda & n_x - \imath n_y \\ n_x + \imath n_y & -n_z - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -(n_z - \lambda)(n_z + \lambda) - (n_x + \imath n_y)(n_x - \imath n_y) \\ &= \lambda^2 - n_z^2 - n_x^2 - n_y^2 \\ &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

Di conseguenza, gli autovalori di $\sigma_{\underline{n}}$ sono $1, -1$.

2. b) Sia $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ un autovettore per $\sigma_{\underline{n}}$ relativo all'autovalore 1 : allora valgono le relazioni

$$\begin{cases} (n_z - 1)a + (n_x - \imath n_y)b = 0 \\ (n_x + \imath n_y)a - (n_z + 1)b = 0 \end{cases}$$

Distinguiamo due casi:

$\underline{n_z = 1}$ In tal caso, essendo $\underline{n}$ un vettore unitario, $n_x = n_y = 0$ e $\sigma_{\underline{n}} = \sigma_z$, dunque un autovettore unitario per $\sigma_{\underline{n}}$ relativo a 1 è $v = (1,0)$.

$\underline{n_z \neq 1}$ In tal caso,

$$a = \frac{n_x - \imath n_y}{1 - n_z} b$$

e un autovettore è

$$v = \begin{pmatrix} n_x - \imath n_y \\ 1 - n_z \end{pmatrix}$$

Dato che

$$\psi(v,v) = (n_x - \imath n_y)(n_x + \imath n_y) + (1 - n_z)^2 = 2(1 - n_z)$$

un autovettore unitario per $\sigma_{\underline{n}}$ è

$$\frac{1}{\sqrt{2(1-n_z)}} \begin{pmatrix} n_x - \imath n_y \\ 1 - n_z \end{pmatrix}$$

In maniera analoga, si ricava che un autovettore unitario per $\sigma_{\underline{n}}$ relativo a -1 è

$$w = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{se } n_z = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2(1-n_z)}} \begin{pmatrix} n_z - 1 \\ n_x + \imath n_y \end{pmatrix} & \text{se } n_z \neq 1 \end{cases}$$

Di conseguenza, una base ortonormale di autovettori per $\sigma_{\underline{n}}$ (rispetto a ψ) è

$$\mathcal{B} = \begin{cases} \mathcal{B}_z & \text{se } n_z = 1 \\ \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2(1-n_z)}} \begin{pmatrix} n_x - \imath n_y \\ 1 - n_z \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{2(1-n_z)}} \begin{pmatrix} n_z - 1 \\ n_x + \imath n_y \end{pmatrix} \right\} & \text{se } n_z \neq 1 \end{cases}$$

3. Con semplici calcoli, si ricava

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= 2\imath\ \sigma_z \\ [\sigma_y, \sigma_z] &= 2\imath\ \sigma_x \\ [\sigma_z, \sigma_x] &= 2\imath\ \sigma_y \end{aligned}$$

4. Poiché

$$\underline{n} \times \underline{n'} = \begin{pmatrix} n_y n'_z - n'_y n_z \\ -n_x n'_z + n'_x n_z \\ n_x n'_y - n'_x n_y \end{pmatrix}$$

per definizione abbiamo

$$\sigma_{\underline{n} \times \underline{n'}} = \begin{pmatrix} n_x n'_y - n'_x n_y & n_y n'_z - n'_y n_z + \imath(n_x n'_z - n'_x n_z) \\ n_y n'_z - n'_y n_z + \imath(-n_x n'_z + n'_x n_z) & -n_x n'_y + n'_x n_y \end{pmatrix}$$

Inoltre, usando le relazioni scritte al punto 3, si ricava

$$\begin{aligned}
[\sigma_{\underline{n}}, \sigma_{\underline{n'}}] &= [n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z, n'_x\sigma_x + n'_y\sigma_y + n'_z\sigma_z] \\
&= n_x n'_x[\sigma_x,\sigma_x] + n_x n'_y[\sigma_x,\sigma_y] + n_x n'_z[\sigma_x,\sigma_z] + n_y n'_x[\sigma_y,\sigma_x] + n_y n'_y[\sigma_y,\sigma_y] + n_y n'_z[\sigma_y,\sigma_z] + \\
&\qquad + n_z n'_x[\sigma_z,\sigma_x] + n_z n'_y[\sigma_z,\sigma_y] + n_z n'_z[\sigma_z,\sigma_z] \\
&= 2\imath\ (n_x n'_y\sigma_z - n_x n'_z\sigma_y - n_y n'_x\sigma_z + n_y n'_z\sigma_x + n_z n'_x\sigma_y - n_z n'_y\sigma_x) \\
&= \begin{pmatrix} n_x n'_y - n'_x n_y & n_y n'_z - n'_y n_z + \imath(n_x n'_z - n'_x n_z) \\ n_y n'_z - n'_y n_z + \imath(-n_x n'_z + n'_x n_z) & -n_x n'_y + n'_x n_y \end{pmatrix} \\
&= 2\imath\ \sigma_{\underline{n}\times\underline{n'}}
\end{aligned}$$

✓