**Compito di Geometria I - 9/9/2014**

Nome e cognome (stampatello) ........................................................................

matricola..............................

**Parte 1** (scrivere direttamente negli spazi assegnati)

**1)** Dato il piano $\Pi$ di equazione $x + 2y + 3z = 1$, scrivere l'equazione di un piano $\Pi'$ parallelo a $\Pi$ tale che il segmento dell'asse $z$ che è compreso tra $\Pi$ e $\Pi'$ abbia lunghezza 5.

..........................................................................

**2)** Dire se i seguenti sottoinsiemi di matrici sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e in tal caso indicarne la dimensione.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ tr(A) = 0\}$ | si | $dim =$ .......... ; | no |
| $\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ det(A) = 0\}$ | si | $dim =$ .......... ; | no |
| $\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ A + {}^tA = 0\}$ | si | $dim =$ .......... ; | no |

**3)** (a) Sia $S$ un qualunque sottoinsieme (non necessariamente sottospazio vettoriale) di $\mathbb{R}^2$. Giustificare (brevemente) che le matrici $A \in GL_2(\mathbb{R})$ tali che $A(S) = S$ formano un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{R})$ rispetto all'operazione di gruppo data dalla composizione (le matrici si considerano come trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ nella maniera standard)

.

(b) Se $S$ è l'ellisse $\{(x, y) : \ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1\}$, intuitivamente, da quanti parametri (continui) dipende tale gruppo? ...............................

**4)** (facoltativo) Data la conica $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 2y + 1 = 0$ determinare le coordinate dei centri (se esistono) e scrivere la forma canonica affine

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

(risolvere su un foglio)

**Esercizio 1.** Sia $V := \mathbb{R}_n[x]$, e sia $T_\alpha : \ V \to V, \quad \alpha \in \mathbb{R}$, l'operatore

$$T_\alpha(p(x)) = \ p(x+1) - p(\alpha x).$$

1. Dimostrare che $T_\alpha$ è lineare.
2. Discutere la diagonalizzabilità di $T_\alpha$ quando $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$.
3. Per $n = 3$ discutere la diagonalizzabilità di $T_\alpha$ quando $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.

**Esercizio 2.** Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i quattro vettori:

$$v_1 = {}^t(1, 0, 0), \ v_2 = {}^t(1, 1, 0), \ v_3 = {}^t(0, 1, 1), \ v_0 = {}^t(1, -1, 1).$$

1. Se $\varphi$ è un prodotto scalare di segnatura $(2, 1, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ e i tre vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ formano una base ortogonale $\mathcal{B}$ rispetto a $\varphi$, che forma assume la matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$?
2. Costruire in $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare $\varphi$ di segnatura $(2, 1, 0)$ in modo che $\mathcal{B}$ sia ortogonale e $v_0$ sia isotropo (basta specificare $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$).
3. Determinare la matrice del $\varphi$ costruito nel punto precedente rispetto alla base canonica.