**Compito di Geometria I - 7/7/2016**

Nome e cognome (stampatello) ........................................................................

matricola..............................

**I parte**

*Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.*

**1)** Dati i punti $P_1 \equiv (0,1,1)$, $P_2 \equiv (1,0,1), P_3 \equiv (1,1,0)$, scrivere equazioni cartesiane del piano $\Pi$ passante per i tre punti $P_1$, $P_2$, $P_3$, del piano $\Pi'$ passante per $P_1$, $P_2$ e ortogonale a $\Pi$, e del piano $\Pi''$ passante per $P_3$ e ortogonale alla retta $P_1P_2$.

$\Pi$ : ; $\Pi'$ : ; $\Pi''$ :

*Esercizio 1.* (risolvere su un foglio) Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e sia $W = \mathbb{R}^2$. Per ogni fissato $\underline{x} \in W$, sia $f_{\underline{x}} : V \to W$ l'applicazione lineare definita da

$$f_{\underline{x}}(A) \;=\; A \cdot \underline{x} \qquad \text{(prodotto righe per colonne).}$$

1. Al variare di $\underline{x}$ in $W$, calcolare il rango di $f_{\underline{x}}$ e una base di $ker(f_{\underline{x}})$.
2. Dimostrare che se $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono linearmente indipendenti allora
$$V = ker(f_{\underline{x}}) \oplus ker(f_{\underline{y}})$$
3. [facoltativo] Dimostrare che
$$\bigcup_{\substack{\underline{x} \in W \\ \underline{x} \neq 0}} ker(f_{\underline{x}}) \;=\; \{A \in V : \; det(A) = 0\}$$

Nome e cognome (stampatello) ........................................................................

matricola.............................

**II parte**

*Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.*

**1)** Sia

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2$$

Scrivere due matrici reali $A$ e $B$ che abbiano polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e tali che $A$ sia diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ mentre $B$ non lo sia.

$A =$ $B =$

*Esercizio 2.* (risolvere su un foglio) Data la matrice

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 0 & 1 \\ 1-\alpha^2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

determinare i valori di $\alpha$ per cui $M_\alpha$ sia diagonalizzabile.

Scelto uno di questi valori $\alpha_0$, calcolare una base di autovettori per $M_{\alpha_0}$.

Nome e cognome (stampatello) ........................................................................

matricola.............................

**III parte**

*Per ogni quesito spuntare le caselle o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.*

**1)** Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 16 \\ 4 & 16 & 32 \end{bmatrix}$$

scrivere la segnatura del prodotto scalare $\varphi_A$ canonicamente associato ad $A$ :

$\sigma(\varphi_A) =$ ..........................................

e una base per il radicale di $\varphi_A$ :

..................................................................................................................

*Esercizio 3.* (risolvere su un foglio) Sia $V = \mathbb{C}_3[x]$ e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ dato da

$$\varphi(p(x), q(x)) := \overline{p(1)}q(1) + \overline{p(i)}q(i) + \overline{p(-1)}q(-1) + \overline{p(-i)}q(-i)$$

$( = \sum_{k=0}^{3} \overline{p(i^k)}q(i^k))$ dove $i$ è l'unità immaginaria.

1. Dimostrare che $\varphi$ è un prodotto hermitiano definito positivo su $V$.
2. Sia $T$ l'endomorfismo di $V$ definito da

   $$T(p(x)) = p(ix).$$

   Dimostrare che $T$ é un operatore unitario su $V$ rispetto a $\varphi$ (cioè $\varphi(T(p(x), T(q(x))) = \varphi(p(x), q(x))$ ).

   Dedurre che la base canonica di $V$ è ortogonale per $\varphi$.
3. Sia $S$ l'endomorfismo di $V$ dato da

   $$S(p(x)) = x^3 p(\frac{1}{x}).$$

   Dimostrare che $S$ è hermitiano e calcolarne la segnatura.