Anno Accademico 2022/2023
Geometria 1
4/9/2023

Esercizio 1.
Su $V = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo il prodotto "componente per componente": $A \odot B$ è la matrice C tale che $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ (prodotto di numeri in $\mathbb{K}$), $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Sia inoltre $\rho : V \to \mathbb{N}$ lo "pseudo-rango" dato da $\rho(A) = \#\{(i,j) : a_{ij} \neq 0\}$ (quindi $0 \leq \rho(A) \leq mn$).

a) Dimostrare che

$$\rho(A \odot B) \leq min(\rho(A), \rho(B)) \; ; \; \rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B) \qquad \forall A, B \in V.$$

b) Dire per quali $k \in \mathbb{N}, k \geq 0$, si ha:

$$\rho(A) \leq k \Rightarrow \rho(A) \leq rg(A).$$

c) Per $A \in V$, sia $f_A \in \mathcal{L}(V)$ l'endomorfismo $f_A(X) = A \odot X$. Dimostrare che

$$rg(f_A) = \rho(A).$$

Esercizio 2.
Sia $n \geq 1$ un intero fissato. Per $a, t \in \mathbb{K}$, sia $A_{a,t} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ la matrice quadrata di ordine $n+1$ con coefficienti a_{ij} tali che $a_{ij} = a$ se $i > j$, $a_{ij} = t^{j-i}$ se $i \leq j$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & .... & t^n \\ a & 1 & t & .... & t^{n-1} \\ a & a & 1 & .... & t^{n-2} \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ . & . & . & .... & . \\ a & a & a & .... & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di $a, t \in \mathbb{K}$, calcolare il determinante di $A_{a,t}$.

b) Al variare di $a, t \in \mathbb{K}$, calcolare il rango di $A_{a,t}$.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 3 ore.

Esercizio 3.
Per $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, indichiamo con $\mathbb{R}[B]$ l'insieme delle matrici polinomiali in B, ottenute valutando un polinomio reale su B, e con $I(B)$ l'ideale di B:

$$\mathbb{R}[B] = \{p(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ p \in \mathbb{R}[x]\} \quad I(B) = \{p \in \mathbb{R}[x] |\ p(B) = 0\}.$$

Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) Sia $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio la cui unica radice reale è 0 e sia $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $p \in I(B)$. Allora, $\det B \geq 0$.

b) Sia $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio la cui unica radice reale è 0 e sia $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che $p \in I(B)$. Allora, per ogni $M \in \mathbb{R}[B]$, $\det(MB) \geq 0$.

c) Sia $p \geq 1$ un intero dispari e siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $A^p = (A - B)^p$. Allora, se $A \in \mathbb{R}[B]$, $\det(AB^k) \geq 0$ per ogni k intero positivo.

(Suggerimento: usare la forma normale di Jordan complessa di B.)

Esercizio 4.

a) Sia V, φ spazio euclideo reale e sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Dimostrare che

$$\psi(f, g) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \varphi(f(\underline{v}_i), g(\underline{v}_i))$$

è un prodotto scalare definito positivo sullo spazio $\mathcal{L}(V)$ degli endomorfismi di V.

b) Sia $\mathcal{B}$ ortonormale. Dimostrare che l'endomorfismo $\tau : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ dato da $\tau(f) = {}^t f$ (l'operatore trasposto rispetto al prodotto φ) è simmetrico (rispetto a ψ) e determinarne autovalori e autospazi.

Esercizio 5. Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}$. Dire (giustificandolo) se un'affinità di $\mathbb{R}^2$ che manda C in sé necessariamente fissa il centro di C. Da quanti parametri dipendono tali affinità?