Anno Accademico 2022/2023
Geometria 1
3/7/2023

Prima parte.

Esercizio 1. [C,R1]
Sia $V = \mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare standard e sia $\mathcal{C}$ la base canonica. Dato $\underline{u} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \in V$ determinare:

a) la matrice $M_{\mathcal{C}}(\sigma)$ associata alla riflessione ortogonale σ rispetto al piano $\underline{u}^\perp$;

b) la matrice $M_{\mathcal{C}}(\rho)$ associata alla rotazione ρ di angolo $\pi/3$ e di asse $\mathrm{Span}(\underline{u})$ (secondo la regola della mano destra: pollice verso $\underline{u}$ e le altre dita che indicano il senso di rotazione).

Esercizio 2. [C,R1]
Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano U, V, W, Z spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.
Fissate $g \in \mathcal{L}(U, V)$ e $h \in \mathcal{L}(W, Z)$ consideriamo l'applicazione $F : \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{L}(U, Z)$ data da $F(f) = h \circ f \circ g$, per ogni $f \in \mathcal{L}(V, W)$.

a) Mostrare che F è lineare e determinarne il rango (in termini delle dimensioni degli spazi coinvolti e dei ranghi di g e h).

b) Mostrare che F è iniettiva se e solo se g è surgettiva e h è iniettiva.

c) Mostrare che F è un isomorfismo se e solo se g e h sono isomorfismi.

Esercizio 3. [R1]
Calcolare il determinante della matrice reale

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 2 ore per una singola parte, 3 ore per tutto.
Sigle dell'esame: R1=recupero primo compitino, R2=recupero secondo compitino, C=compito.

Seconda parte.

Esercizio 4. [C, R2]

a) Data la matrice nilpotente $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sia $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tale che $AN = NA$. Determinare tutte le possibili forme canoniche di Jordan di A.

b) Sia $J = J_{0,n}$ il blocco di Jordan di ordine n nilpotente. Dimostrare che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ è tale che $AJ = JA$ allora A ha un solo autovalore. Dimostrare anche che se A e J possono essere messe simultaneamente in forma di Jordan allora o A è un multiplo dell'identità oppure ha un solo blocco di Jordan.

Esercizio 5. [C, R2 vedi singoli punti]
Siano P, Q matrici $n \times n$ reali simmetriche semidefinite positive.
Dimostrare le seguenti affermazioni (dove l'ortogonalità è intesa rispetto al prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$):

a) [C, R2] $\operatorname{Im} P = (\operatorname{Ker} P)^\perp$;

b) [C, R2] $\operatorname{Ker}(P+Q) = \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Ker} Q$;

c) [R2] $\operatorname{Im}(P+Q) = \operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q$.

Esercizio 6. [C, R2 vedi singoli punti]
Nello spazio affine $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, siano date le rette $r = \{x = 0\},\ s = \{y = 0\}$ e il punto $P \equiv (2, 1)$.

a) [C,R2] Dire (giustificandolo) da quanti parametri dipende il sottogruppo delle affinità che stabilizzano r, s e P.

b) [R2] Determinare eventuali coniche non degeneri che siano tangenti ad r ed s e contengano P, specificando se ne esistono a centro e non a centro.