Anno Accademico 2023/2024
Geometria 1 - Compito 3/6/2024

Chi recupera il primo compitino deve fare gli esercizi 1) e 2); chi recupera il secondo deve fare il 3) e il 4).

Esercizio 1. Al variare di α, β nel campo $\mathbb{K}$, calcolare

a) il determinante della matrice

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ -1 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \beta & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), n \in \mathbb{N}$$

b) il determinante della matrice

$$B_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta & & \alpha \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \alpha & \cdots & \cdots & \alpha & \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), n \in \mathbb{N}$$

(si puo' fare Gauss sulla $A_{\alpha,\beta}$ usando la prima riga e osservare cosa viene il cofattore dell'elemento di posto (1,1)).

Esercizio 2. Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ data da $f(x;y;z;t) = (y+z; y+2z-t; -x+2y+z; y+z)$.

a) Determinare il rango di f.

b) Determinare lo spettro di f e dedurne che f è diagonalizzabile.

c) Mostrare che aggiungendo il vettore canonico $\underline{e}_4$ ad un autovettore relativo a 0, uno relativo a -1 e uno relativo a 1 si ottiene una base di R^4 e calcolare la matrice di f in tale base.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 3 ore.

Esercizio 3. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Per $n = 2$, dare un esempio di una matrice A tale che $rk(A) > rk(A^2)$ (si può supporre A triangolare).

b) Caratterizzare, in termini della loro forma di Jordan, le matrici A tali che $rk(A) = rk(A^2)$.

c) Dedurre che $rk(A) = rk(A^2) \iff$ fra i polinomi che si annullano in A ne esiste uno del tipo $xq(x)$ con $q(0) \neq 0$ (cioè avente 0 come radice semplice).

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}_n[x]$, e sia $\varphi(\sum_{i=0}^n a_i\ x^i, \sum_{i=0}^n b_i\ x^i) = \sum_{i=0}^n a_i b_i$ il prodotto "canonico". Sia $f_n : V \to V$ dato da

$$f_n(\sum_{i=0}^n a_i\ x^i) = \sum_{i=0}^n (a_{i-1} + a_{i+1})\ x^i \qquad \text{(si pone } a_{-1} = a_{n+1} = 0\text{)}$$

a) Scrivere la matrice $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ di f_n rispetto alla base data dai monomi $x^k,\ k = 0, \ldots, n$, e dedurre che f_n è un operatore simmetrico.

b) Mostrare che ogni autovalore di f_n ha molteplicità geometrica 1.

c) Per $n \leq 3$, dimostrare che gli autovalori di f_n sono compresi nell'intervallo $[-2, 2]$.

d) Per $n = 2$, dire qual è la forma canonica affine della conica che ha A_2 come matrice completa.