Anno Accademico 2023/2024
Geometria 1 - 23/1/2025

Esercizio 1. Dato il campo $\mathbb{K}$ e $x \in \mathbb{K}$, sia $A_n(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice data da $a_{ij} = x^{min(i,j)}$, $i, j = 0, \ldots, n-1$. (es: $A_4(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x & x \\ 1 & x & x^2 & x^2 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$).

a) Determinare $det(A_3(x))$ e $A_3(2)^{-1}$.

b) Determinare $det(A_n(x))$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $A_n(x)$ la matrice dell'esercizio 1.

a) Per $n = 3$, dimostrare che $x-1$ è autovalore di $A_3(x)$, $\forall x$, e ${}^t[1, x-1, -1]$ è un autovettore relativo.

b) Per $n = 3$, $x = -1$, determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto canonico) di autovettori di $A_3(-1)$.

c) Per n qualunque, dimostrare che se $x > 1$ la matrice $A_n(x)$ ha tutti autovalori positivi. Dire come sono i segni degli autovalori se $0 < x < 1$.

Esercizio 3. Determinare la forma canonica di Jordan reale e complessa della matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4. Sia $H = \{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{bmatrix} \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{C} \}$.

a) Dimostrare che H è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 4 con base

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

b) Dimostrare che H è chiuso per il prodotto tra matrici, ed ogni $M \in H$, $M \neq 0$ ha un'inversa in H (si dice che H è un *corpo, o campo non commutativo).*

c) Dimostrare che il gruppo $SU_2 = \{M \in U_2 : \ det(M) = 1\}$ *è contenuto in* H.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 3 ore.