Anno Accademico 2023/2024
Geometria 1 - 16/9/2024

Esercizio 1. Sia $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice tridiagonale con 1 sulla diagonale principale e sulle due diagonali adiacenti (es: $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$).

a) Determinare gli n per cui A_n è invertibile

b) Calcolare l'inversa di A_3

c) Mostrare che ogni autovalore di A_n ha molteplicità geometrica 1

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{K}_n[x]$, dove $\mathbb{K}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$ (che quindi contiene i naturali). Per $n \leq 2$, dire se l'endomorfismo di V dato da

$$f(p(x)) \;=\; \sum_{k=0}^{n} p(k)x^k$$

si può mettere in forma di Jordan e se sí determinarla (giustificare tutti i passaggi).

Esercizio 3. Consideriamo $M_n(\mathbb{R})$ dotato del prodotto scalare $\varphi(A, B) = tr(AB)$.

Per $1 \leq k \leq n$, sia

$$W_k = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \;:\; A \in M_k(\mathbb{R});\; B \in M_{n-k}(\mathbb{R}); \text{ tali che } {}^tA = -A,\; {}^tB = -B \right\}$$

a) Per $n = 4$ e $k = 2$, determinare la segnatura della restrizione di φ a W_k e la segnatura della restrizione di φ a $W_k^{\perp}$.

b) In generale, determinare la segnatura della restrizione di φ a W_k e la segnatura della restrizione di φ a $W_k^{\perp}$.

[Si può usare il fatto dimostrato in classe che i sottospazi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ delle matrici simmetriche e antisimmetriche sono ortogonali, e inoltre $\varphi_{|\mathcal{S}} > 0,\; \varphi_{|\mathcal{A}} < 0$]

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{C}^3$, con prodotto hermitiano canonico, sia $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 :\; z_1 + z_2 + iz_3 \;= 0\}$.

a) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ che estende una base ortonormale di W.

b) Determinare la matrice della proiezione ortogonale ρ_W su W rispetto alla base canonica.

c) Dimostrare che un endomorfismo f di $\mathbb{C}^3$ commuta con ρ_W se e solo se W e $W^{\perp}$ sono f-invarianti.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 3 ore.