Anno Accademico 2022/2023
Geometria 1
12/6/2022

Nel seguito, $\mathbb{K}$ è un campo e per V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, indichiamo con $\mathcal{L}(V)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi di V. Per $m, n > 0$ interi, indichiamo con $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici di tipo $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ e con $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Prima parte.

Esercizio 1. [C,R1]
In $\mathbb{R}^4$, consideriamo il sottospazio $\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$ e i vettori $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Per $\theta \in \mathbb{R}$, poniamo $\underline{v}_1^\theta = \cos(\theta)\underline{v}_1 + \sin(\theta)\underline{v}_2$, $\underline{v}_2^\theta = -\sin(\theta)\underline{v}_1 + \cos(\theta)\underline{v}_2$.

a) Scrivere equazioni cartesiane per $W = \mathrm{Span}(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$ e calcolare basi per Π e per $\Pi \cap W$.

b) Dire, motivando la risposta, per quali $\theta \in \mathbb{R}$ esiste un endomorfismo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ tale che $f(\Pi) = \Pi$, $f(\underline{v}_i) = \underline{v}_i^\theta$, per $i = 1, 2$.

Esercizio 2. [R1]
Per $k, n \geq 1$, $a \in \mathbb{K}$, sia $B_k(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & a & \dots & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,k}(\mathbb{K})$ e definiamo $M_n(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ricorsivamente: $M_1(a) = [1]$, $M_2(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $M_n(a) = \begin{bmatrix} M_2(a) & B_{n-2}(a) \\ B_{n-2}(a)^\top & M_{n-2}(a) \end{bmatrix}$, $\forall\, n \geq 3$.

a) Calcolare $\det(M_n(0))$ per ogni $n \geq 1$.

b) Calcolare $\det(M_n(a))$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 3. [C,R1 vedi singoli punti]
Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano $U, W \subset V$ due sottospazi.

a) [C,R1] Dimostrare che per ogni $\underline{u} \in U \setminus W$ esiste $g \in Ann(W)$ tale che $g(\underline{u}) \neq 0$.

b) [C,R1] Dimostrare che $Ann(W) \subset Ann(U) \Rightarrow U \subset W$.

c) [R1] Sia $\underline{v} \in V$ e si supponga che esistano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$, con $\underline{w}_1 \neq \underline{w}_2$ che verificano la seguente proprietà: se $f \in V^*$ è tale che $f(\underline{w}_1) = f(\underline{w}_2)$, allora $f(\underline{v}) = 0$.
Mostrare che $\underline{v} \in W$.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 2 ore per una singola parte, 3 ore per tutto.
Sigle: R1=recupero primo compitino, R2=recupero sedondo compitino, C=compito

Seconda parte.

Esercizio 4. [C,R2 vedi singoli punti]
Sia $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, con prodotto hermitiano $\varphi(X,Y) = \mathrm{tr}(X^*Y)$, per ogni $X, Y \in V$. Per $X, Y \in V$, chiamiamo *commutatore* di X e Y la matrice $[X,Y] = XY - YX$. Per ogni $H \in V$, sia $f_H \in \mathcal{L}(V)$ l'endomorfismo $f_H(X) = [H,X]$.

a) [C,R2] Per $n = 2$ e $H = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ determinare la forma canonica di Jordan (su $\mathbb{C}$) di f_H al variare di $a, b, c \in \mathbb{C}$.

b) [C,R2] Per $n = 2$ e $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ determinare gli autovalori di f_H e trovare una base ortonormale di V fatta da autovettori di f_H. Dedurre che f_H è autoaggiunto.

c) [C,R2] Dimostrare (n qualunque) che se H è autoaggiunta allora f_H è autoaggiunto.

d) [R2] Sia $E^{ij} \in V$ la base canonica (quindi $(E^{ij})_{rs} = \delta_{ir}\delta_{js}$). Scrivere $[E^{mn}, E^{pq}]$ come combinazione della base E^{ij}. Dedurre che $Span\{[X,Y] |\ X, Y \in V\} = W$, dove $W = \{A \in V |\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

Esercizio 5. [C,R2]
Per $n > 1$, consideriamo il seguente prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$:

$$\phi(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |i-j| x_i y_j, \text{ per ogni } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

a) Determinare la matrice di ϕ nella base canonica di $\mathbb{R}^n$ e calcolarne il determinante.

b) Calcolare la segnatura di ϕ.

Esercizio 6. [C,R2 vedi singoli punti]
Dato il piano affine standard $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2(\mathbb{K})$, sia L l'insieme delle rette affini di $\mathcal{A}$. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{X} = \{(\ell, P_1, P_2) \in L \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} |\ \ \mathrm{Aff}\{P_1, P_2\} \text{ è una retta parallela a } \ell\}.$$

a) [C,R2] Dimostrare che il gruppo affine $A_2(\mathbb{K})$ agisce transitivamente su $\mathcal{X}$. Da quanti parametri dipende lo stabilizzatore di una terna?

b) [R2] Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, data la retta ℓ di equazione $2x + y = 2$ e i punti $P_1 = \binom{2}{0}$, $P_2 = \binom{0}{4}$ determinare l'equazione di una conica C tale che $P_1, P_2 \in C$ e C sia tangente a ℓ (cioè $\#\{C \cap \ell\} = 1$).