Compito di Geometria I - 11/1/2016

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

I parte

Per ogni quesito spuntare una (sola) casella o riempire col risultato (dove richiesto); 1 punto per ogni risposta giusta; -1 per ogni risposta errata.

1) Siano $P \equiv (1, -1, 2)$, $Q \equiv (-2, 0, 3)$ punti in $\mathbb{R}^3$. L'equazione del piano passante per il punto di mezzo del segmento PQ e ortogonale alla retta passante per P e per Q è:

....

2) Sia A una matrice quadrata di ordine 2 a coefficienti complessi.

- Se A^2 è diagonalizzabile allora anche A lo è | si | no |
- Se A è invertibile e A^2 è diagonalizzabile allora anche A lo è | si | no |
- Se A^{-1} è diagonalizzabile allora anche A lo è | si | no |

3) Sia φ un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ e siano v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente indipendenti.

- Se $\varphi_{|Span\{v_1,v_2\}} > 0$ e $\varphi(v_3, v_3) < 0$ allora $i_+(\varphi) = 2$, $i_-(\varphi) = 1$ | si | no |
- Se $\varphi(v_i, v_i) > 0$ per $i = 1, 2, 3$ allora $\varphi > 0$ | si | no |
- Se $\varphi(v_1, v_1) > 0$, $\varphi(v_2, v_2) > 0$ e $\varphi(v_3, v_3) < 0$ allora $i_+(\varphi) = 2$, $i_-(\varphi) = 1$. | si | no |

4) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - z^2 + 2 = 0$$

....

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. Sia $\underline{v} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $r = Span(\underline{v})$. Sia f_θ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato dalla rotazione intorno alla retta r di angolo θ, secondo la regola della mano destra (per cui il pollice è rivolto come il vettore $\underline{v}$).

1. Scrivere la matrice associata a $f_{2\pi/3}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare gli autovalori di f.
2. Scrivere la matrice associata a $f_{\pi/3}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Determinare gli autovalori di f.
3. Dimostrare che due matrici $A,\ B\ \in SO_3$ sono simili se e solo se hanno la stessa traccia.

Esercizio 2. Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ dato da

$$\varphi(A,B) \ = \ tr(A)tr(B)$$

1. Dimostrare che φ è un prodotto scalare, è degenere, determinare $V^\perp$ (indicandone anche la dimensione) e dedurre la segnatura di φ.
2. Determinare una base ortogonale per φ.