II compitino Geometria 7/4/2016

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

Parte I *(per ogni quesito riempire col risultato o barrare la casella. Ogni risposta errata vale -1.)*
[$>$ 12 punti]

1. Sia $V = \{M_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ M_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}\}$.

   Per $\alpha \neq 0$ oppure $\beta \neq 0$ scrivere la martrice inversa $\quad M^{-1}_{\alpha,\beta} \ =$

2. Scrivere una corrispondenza biunivoca φ tra i numeri complessi $\mathbb{C}$ e V che preservi somma e prodotto (cioè $\varphi(z+w) = \varphi(z) + \varphi(w), \ \varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w)$)

   $\varphi : a + ib \ \longrightarrow$ ....

3. Sia $W = \{M_{z,w} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \ M_{z,w} = \begin{bmatrix} \overline{z} & -\overline{w} \\ w & z \end{bmatrix}, z, \ w \in \mathbb{C}\}$.

   Per $z \neq 0$ oppure $w \neq 0$ scrivere la martrice inversa $\quad M^{-1}_{z,w} \ =$

4. [facoltativo] Scrivere una corrispondenza biunivoca ψ tra i quaternioni e W che preservi somma e prodotto:

   $\psi : a + ib + jc + kd \ \longrightarrow$ .....

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false su una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

1. A è diagonalizzabile se e solo se $\overline{A}$ è diagonalizzabile $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

   se no fare un esempio: $A =$

2. se il polinomio caratteristico di A è $\ p(\lambda) = (-1)^n \ \lambda^2(\lambda^{n-2} - 1)$ allora $rg(A) = n - 2$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

   se no fare un esempio: $A =$

3. se il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = (-1)^n \ \lambda^k(\lambda^{n-k} - 1)$ e $rg(A) = n - k$ allora A è diagonalizzabile $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

   se no fare un esempio: $A =$

Parte II (scrivere su un foglio)
[$>$ 18 punti]

Esercizio. Sia $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ed $A \in V$. Sia f_A l'endomorfismo di V definito da

$$f_A(X) \;=\; AX - XA$$

1. Quando $n = 2$, e $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ scrivere la matrice associata ad f_A rispetto alla base canonica
$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Quando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dimostrare che f_A è diagonalizzabile e determinare una base di autovettori per V.

3. Quando $n = 2$, dimostrare che f_A è l'applicazione nulla se e solo se A è un multiplo dell'identità.

4. Quando $n = 2$, dimostrare che se A non è un multiplo dell'identità allora $rg(f_A) = 2$ e dedurre che una matrice B commuta con A se e solo se $B \in Span(Id, A)$, dove Id è la matrice identità di ordine 2.

5. Per n qualunque, dimostrare che se A è diagonalizzabile e le molteplicità degli autovalori distinti sono $\mu_1, \dots, \mu_k$, allora vale
$$dim(ker(f_A)) = \mu_1^2 + \cdots + \mu_k^2$$